

Esame di Geometria 1  
14 Gennaio 2020  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

---

Nome:

Cognome:

Matricola:

---

Ambiente e Territorio	
Civile	
Chimica	

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & i & i \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare il determinante di  $A$ .
2. (2 punti) Calcolare  $A^{-1}$  utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.
3. (2 punti) Calcolare  $A^{-1}$  utilizzando la formula di Cramer.
4. (2 punti) Calcolare  $A^{-1}$  utilizzando l'algoritmo di inversione.

Sol.: 1)  $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ 1-i & i & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1-i & i \end{pmatrix} = -(i - (i+1)) = 1$

2)  $\text{Tr} A = 2+i$ ,  $(\text{Tr} A)^2 = 3+4i$ ;  $\text{Tr}(A^2) = 6i+1$ .

$$P_A(x) = x^3 - \text{Tr} A x^2 + \frac{1}{2} (\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)) x - \det A =$$

$$= x^3 - (2+i)x^2 + (1-i)x - 1$$

Per il Teorema di Cayley-Hamilton  $A^{-1} =$

$$A^{-1} = A^2 - (2+i)A + (1-i)\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3)  $c_{11} = -i$     $c_{21} = 0$     $c_{31} = i$   
 $c_{12} = 3-2i$     $c_{22} = -1$     $c_{32} = -3$   
 $c_{13} = -2+i$     $c_{23} = 1$     $c_{33} = 2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & i & i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & i-1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 0 & 2+2i & -i & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 3-2i & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 3-2i & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



**Esercizio 2.** Sia  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  di equazione

$$U : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

- (2 punti) Determinare una base ortonormale di  $U$ .
- (2 punti) Calcolare la matrice  $P$  di proiezione ortogonale su  $U$ .
- (2 punti) Calcolare la distanza di  $X = 4(1, -1, -1, 0)^t$  da  $U$ .
- (1 punto) Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  si consideri il sottospazio vettoriale  $Z_k$  generato dal vettore  $z_k = (1, k, -1, -k)^t$ . Stabilire per quali  $k \in \mathbb{R}$  la proiezione  $p_U^{Z_k}$  su  $U$  lungo  $Z_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali  $k$  trovare una base ortonormale di  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  formata da autovettori per  $p_U^{Z_k}$ , specificando i corrispondenti autovalori.

**Sol.:** 1)  $U = \text{Ker}(1, -1, -1, 1)$ . Una base di  $U$  è quindi

$$B_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Poniamo}$$

$$F_1 = v_1; \quad F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|F_1\| = \sqrt{2}; \quad \|F_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \|F_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Una base ortonormale di  $U$  è

$$E_U = \left\{ E_1 = \frac{1}{\|F_1\|} F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; E_2 = \frac{1}{\|F_2\|} F_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; E_3 = \frac{1}{\|F_3\|} F_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2) B := (E_1 | E_2 | E_3) \Rightarrow P = BB^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{pr}_U(X) = PX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dist}(X, U) = \|X - PX\| = 6$$

4)  $z_k \in U^\perp \Leftrightarrow k = -1$ . Per cui  $p_U^{z_k}$  è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se  $k = -1$ . In questo caso, una base ortonormale di autovettori è  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  dove  $E_4 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $U = V_1(p_U^{z_{-1}})$ ,  $z_{-1} = V_0(p_U^{z_{-1}})$ .



**Esercizio 3.** Mettiamoci in  $\mathbb{R}^2$  dotato del prodotto scalare standard.

- (1 punto) Sia  $Q = (1, 2)^t$ . Trovare il punto  $R$  ottenuto ruotando  $Q$  di  $30^\circ$  in senso anti-orario attorno al punto  $P = (2, 2)^t$ .
- (1 punto) Sia  $P = (2, 3)^t$ . Trovare il punto  $R$  ottenuto riflettendo ortogonalmente  $P$  attraverso la retta  $r : 2x + 3y = 1$ .
- (1 punto) Trovare la posizione reciproca delle rette  $r : 2x + 3y = -1$  e  $s : 3x + 2y = 2$ .
- (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per  $P = (1, 1)^t$  e parallela alla retta  $r : 2x + 3y = -2$ .
- (1 punto) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$  e trovare la retta tangente a  $C$  nel punto  $P = \frac{1}{4}(9, 3\sqrt{3} - 8)^t$ .
- (1 punto) Calcolare la distanza tra il punto  $P = (3, 2)^t$  e la retta  $r : 2x - y = 1$ .
- (1 punto) Sia  $r : 2x + y = 1$  e  $P = (2, 2)^t$ . Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle due rette  $r_1$  ed  $r_2$  passanti per  $P$  e che formano un angolo di  $\pi/4$  con  $r$ . Posto  $P_1 = r \cap r_1$  e  $P_2 = r \cap r_2$  calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici  $P, P_1$  e  $P_2$ .

$$1) R = P + R_{\frac{\pi}{6}}(Q - P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2) X_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r_0 : y = -\frac{2}{3}x, R = X_0 + Q_{-\frac{2}{3}}(P - X_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{2} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 \\ -33 \end{pmatrix}$$

$$3) \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow ms = \{P_0\}. P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$4) 2x + 3y = k, 2 + 3 = 5 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \text{La retta cercata \u00e9 } 2x + 3y = 5 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

$$5) C : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4} \quad C = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}; r = \frac{3}{2}. \quad C : \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$P - C = \begin{pmatrix} 3/4 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = C + r \begin{pmatrix} \cos \pi/3 \\ \sin \pi/3 \end{pmatrix}. \text{ La retta Tangente a } C \\ \text{in } P \text{ \u00e9 } t_P = P + \langle \begin{pmatrix} -\sin \pi/3 \\ \cos \pi/3 \end{pmatrix} \rangle : x + \sqrt{3}y = \frac{9}{2} - 2\sqrt{3}.$$

$$6) \text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$7. \quad 1 = \left| \frac{-2+m}{1+2m} \right| \Leftrightarrow -2+m = \pm(1+2m) \Leftrightarrow m=3 \vee m = \frac{1}{3}$$

Le rette cercate sono

$$r_1: -3x+y = -4 \quad \text{e} \quad r_2: x+3y = 8.$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \quad r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$$P_1 = r_1 \cap r_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = r_2 \cap r_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Area} (\widehat{P P_1 P_2}) = \frac{1}{2} |\det(P-P_1, P_2-P_1)| = 5$$

$$\text{Perimetro} (\widehat{P P_1 P_2}) = \|P-P_1\| + \|P-P_2\| + \|P_2-P_1\| = 2\sqrt{5}(1+\sqrt{2}).$$

**Esercizio 4.** Mettiamoci in  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare standard.

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette

$$r: \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad s: \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right)$$

senza cambiare la loro forma.

2. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano:

$$r: \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad \pi: \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \right)$$

senza cambiare la loro forma.

3. (1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti  $P_1 = (1, 1, 1)^t$ ,  $P_2 = (1, 2, 1)^t$  e  $P_3 = (2, 2, 1)^t$ .

4. (1 punto) Consideriamo le due rette  $r = (3, -1, 2)^t + \langle (1, 1, 0)^t \rangle$  e  $s = (0, 5, 2)^t + \langle (1, -2, 1)^t \rangle$ . Dimostrare che  $r$  ed  $s$  sono sghembe e trovare il piano  $\pi$  contenente  $r$  e parallelo a  $s$ .

5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici  $P_1 = (1, 1, 1)^t$ ,  $P_2 = (1, -1, 2)^t$  e  $P_3 = (-2, 1, 1)^t$ .

6. (1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette  $r = (1, 1, 1)^t + \langle (1, 2, -1)^t \rangle$  ed  $s = (1, 2, 3)^t + \langle (2, -1, 1)^t \rangle$

7. (1 punto) Calcolare la distanza tra il punto  $P = (1, 2, 3)^t$  ed il piano  $\pi: 2x + 3y - z = 2$ .

Sol.: 1.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r$  ed  $s$  non sono parallele.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t=1.$$

$$r \cap s = \{P_0\} \text{ dove } P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & | & 2 \\ 0 & 11 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & | & -5/11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1/22 \\ 0 & 1 & | & -5/11 \end{pmatrix} \Rightarrow r \cap \pi = \{P_0\} \text{ dove}$$

$$P_0 = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$



$$3. \pi = P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle : z = 1$$

$$4. \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow r \text{ ed } s \text{ sono sghembe.}$$

$r$  ha eq. cartesiana  $r: \begin{cases} x-y=4 \\ z=2 \end{cases}$ . Fascio di piani per  $r$ :

$$\pi_{\alpha, \beta} : \alpha(x-y-4) + \beta(z-2) = 0 \text{ ovvero } \alpha x - \alpha y + \beta z = 4\alpha + 2\beta.$$

$$s \text{ \u00e9 parallelo a } \pi_{\alpha, \beta} \Leftrightarrow (\alpha, -\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

Il piano cercato \u00e9

$$\pi_{1, -3} : x - y - 3z = -2.$$

$$5. P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Area} = \frac{1}{2} \|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\| = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}. \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = -13 \Rightarrow$$

$$\text{dist}(r, s) = \frac{13}{\sqrt{35}}$$

7. Sia  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$ . Allora

$$\text{dist}(P_1, \pi) = \|\text{Pr}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}(P-Q)\| = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

**Esercizio 5.** Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali  $x_1, \dots, x_6$ , dipendente dal parametro  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 - (k-1)x_4 - (k-1)x_6 = k-3 \\ 3x_1 + 3(k-1)x_2 + x_3 - (k-1)x_4 - (k+1)x_6 = k^2 + k - 7 \\ x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 + (k-2)(k-1)x_5 + (4k-6)x_6 = k^2 - 3 \end{cases}$$

- (1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.
- (3 punti) Trovare i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile.
- (3 punti) Per i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.

Sol.

$$\hat{A}_k := \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & k-1 & 0 & -k+1 & 0 & -k+1 & k-3 \\ 3 & 3k-3 & 1 & -k+1 & 0 & -k-1 & k^2+k-7 \\ 1 & k-1 & 1 & k-1 & (k-2)(k-1) & 4k-6 & k^2-3 \end{array} \right)$$

$$\leadsto \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & k-1 & 0 & -k+1 & 0 & -k+1 & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2k-2 & 0 & 2k-4 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & 1 & 2k-2 & (k-2)(k-1) & 5k-7 & k^2-k \end{array} \right)$$

$$\leadsto \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & k-1 & 0 & -k+1 & 0 & -k+1 & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2k-2 & 0 & 2k-4 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k-2)(k-1) & 3k-3 & k-2 \end{array} \right).$$

Se  $\boxed{k=1}$  l'ultima riga è  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ -1)$  e quindi il sistema non è risolvibile.

Se  $\boxed{k=2}$ :

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \leadsto \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se  $(k-1)(k-2) \neq 0$  :

$$\text{rref}(\hat{A}_k) = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & k-1 & 0 & -k+1 & 0 & -k+1 & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2k-2 & 0 & 2k-4 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k-2} & \frac{1}{k-1} \end{array} \right)$$

il sistema è risolvibile e le soluzioni sono

$$\left( \begin{array}{c} k-3 \\ 0 \\ k^2-2k+2 \\ 0 \\ \frac{1}{k-1} \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \left( \begin{array}{c} 1-k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} k-1 \\ 0 \\ 2-2k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1-k \\ 0 \\ 4-2k \\ 0 \\ 3/2-k \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle$$