Esame di Geometria 1
Ingegneria Chimica
7 Febbraio 2020
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome:

Cognome:

Matricola:

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = (4, -4, 3, -4, 0)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Dimostrare che la proiezione ortogonale su U è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$ composta di suoi autovettori.*

Esercizio 2. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{C}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{C}^3$*.*
2. *(1 punto) Si consideri l'unica funzione lineare* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *tale che*

   $$f(v_1) = v_2, \quad f(v_2) = v_1, \quad f(v_3) = v_1 + v_2.$$

   Trovare la matrice A *che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{B}$*.*
3. *(3 punti) Trovare la matrice* C *che rappresenta* f *nella base standard.*
4. *(1 punto) Trovare una base del nucleo ed una base dell'immagine di* f*.*
5. *(1 punto) Stabilire se* f *è diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$*.*

Esercizio 3. *Mettiamoci in* $\mathbb{R}^2$ *dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia* $Q = (1, -2)^t$ *e* $P = (3, -4)^t$. *Trovare il punto* R *ottenuto ruotando* Q *attorno a* P *di* 30° *in senso anti-orario.*

2. *(1 punto) Sia* $P = (14, -14)^t$. *Trovare il punto* R *ottenuto riflettendo ortogonalmente* P *attraverso la retta* $r : 3x + 2y = 1$.

3. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra le due rette* $r_1 : 3x + y + 5 = 0$ *e* $r_2 : 2x - y + 1 = 0$.

4. *(2 punti) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di equazione* $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ *e trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta tangente* t_P *a* $\mathcal{C}$ *nel punto* $P = P_{\pi/4} = C + r(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))^t$ *(dove* C *è il centro ed* r *il raggio di* $\mathcal{C}$*).*

5. *(2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici* $P_1 = (2, 4)^t$, $P_2 = (3, 2)^t$, $P_3 = (1, 1)^t$.

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette (se si intersecano trovare il punto di intersezione)*

$$r : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad s : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

   senza cambiare la loro forma .

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano (se si intersecano trovare il punto di intersezione):*

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad \pi : 3x - y + 2z = 1$$

   senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

4. *(2 punti) Consideriamo le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

   Dimostrare che r_1 ed r_2 sono sghembe e trovare equazioni cartesiane del piano π contenente r_1 e parallelo a r_2.

5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette r_1 ed r_2 del punto 4.*

6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*