Prova scritta di Geometria 1
Esame in modalità telematica
Durata prova: 2 ore
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 Giugno 2020

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti punti del piano reale:* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Sia* r *la retta passante per i punti* P *e* Q. *Sia* $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza (o coefficiente angolare) della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* C *ed* r.
4. *(1 punto) Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro* C *e tale che la retta* r *sia ad essa tangente.*
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *ottenuto riflettendo* C *attraverso* r.
6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, Q *e* C.
7. *(1 punto) Fare un disegno che illustri la situazione.*

Sol.:

1) $r: \ x+y=4 \qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $r: \ y = -x+4 \Rightarrow$ la pendenza è $m = -1$.

3) $\mathrm{dist}(C, r) = \dfrac{|3+3-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = d$

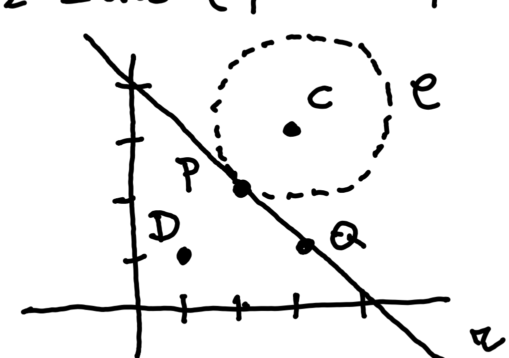
4) $e: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 2 \quad , \quad e = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$

5) $Q_m = \dfrac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$D = P + Q_m(C-P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) $\text{Area} = \dfrac{1}{2} |\det(P-Q, C-Q)| = \dfrac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 1$

7) Notiamo che $\mathrm{dist}(P, C) = \sqrt{2} = \mathrm{dist}(C, r)$ e quindi P è il punto di tangenza:



1

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Trovare le equazioni parametriche di r.*
2. *(1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di s.*
3. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza tra r ed s.*
5. *(1 punto) Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

1) $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

2) $s : \begin{cases} x - z = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ r ed s sono sghembe.

4) $\mathrm{dist}(r,s) = \dfrac{\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{2}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} = 1$

5) $\text{Area} = \dfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$

Esercizio 3. *Fissiamo un numero reale q e consideriamo la matrice* $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -q^2 \\ 0 & 1 & -2q \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di A_q.*
2. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di A_q.*
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A_q.*
4. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A_q.*
5. *(2 punti) Stabilire se esiste un numero reale q per il quale A_q è diagonalizzabile.*

Sol.:

1) $\operatorname{Ker} A_q = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -q^2 \\ 0 & 1 & -2q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} q^2 \\ 2q \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $\operatorname{Im} A_q = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. È il piano di equazione $x=0$.

3) $P_{A_q}(x) = x^3 + 2q\,x^2 + q^2 x = x\,(x^2 + 2q\,x + q^2) =$

$= x\,(x+q)^2.$

4) $\operatorname{Sp}(A_q) = \{0, -q\}$.

5) $ma_A(0) = 1 = \dim \operatorname{Ker} A_q = mg_A(0)$.

$ma_A(-q) = 2$. Calcoliamo $V_{A_q}(-q)$:

$V_{A_q}(-q) = \operatorname{Ker}(-q\mathbb{1}_3 - A_q) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ -1 & -q & q^2 \\ 0 & -1 & q \end{pmatrix} =$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & q & -q^2 \\ 0 & 1 & -q \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & q & -q^2 \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & q^2 & -q^3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & q & -q^2 \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A_q = 1 \ \forall q$

A_q non è diagonalizzabile, per ogni $q \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(3 punti) Trovare la matrice che rappresenta la funzione "moltiplicazione a sinistra per* A*" che a lezione abbiamo denotato con* $S_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, nella base* $\mathcal{B}$ *(si ricorda che* S_A *è definita come* $S_A(X) = AX$*). Chiamare tale matrice* C.
3. *(3 punti) Stabilire se* A *è invertibile, e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*

Sol. : 1) $B := (v_1 | v_2 | v_3)$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$C = B^{-1} A B$. Applichiamo l'algoritmo di inversione $(B | AB) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_3 | C)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 11 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3) $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow$ A è invertibile. Calcoliamo A^{-1} con Cramer:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.

Sol.: 1) $A = A^t$. Per il Teorema spettrale, A è ortogonalmente diagonalizzabile.

$$P_A(x) = x^3 - \mathrm{Tr}A\, x^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right)x - \det A.$$

$\mathrm{Tr}A = -3$, $\mathrm{Tr}(A^2) = 3+3+3 = 9$,

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$P_A(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3). \Rightarrow Sp(A) = \{0, -3\}.$$

$$V_0(A) = \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\,(-1, 1, -1) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \rangle$$

ortonormalizziamo:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|F_1\| = \sqrt{2}, \quad \|F_2\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V_{-3}(A) = \mathrm{Ker}\,(-3\mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$