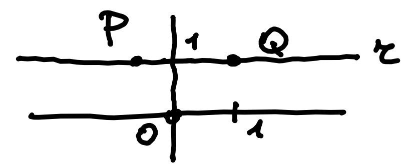
Prova scritta di Geometria 1
Esame in modalità telematica
Durata prova: 2 ore
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

14 Luglio 2020

**Esercizio 1.** *Consideriamo i seguenti punti del piano:* $P = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Sia $r$ la retta passante per i punti $P$ e $Q$.*

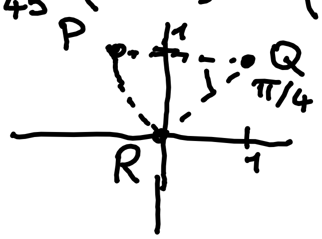
1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta $r$.*
2. *(1 punto) Calcolare il punto $R$ ottenuto ruotando il punto $P$ di $45°$ in senso antiorario attorno al punto $Q$.*
3. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta $s$ passante per i punti $R$ e $Q$.*
4. *(1 punto) Calcolare il punto $P'$ ottenuto riflettendo il punto $P$ attraverso la retta $s$.*
5. *(2 punti) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ che ha centro $P'$ e tale che la retta $s$ sia ad essa tangente.*
6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P$, $P'$ ed $R$.*

*Fare i disegni che illustrino la situazione.*



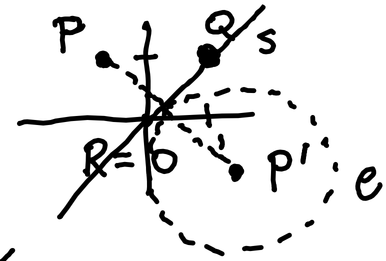

Sol.: 1) $r: y = 1$ ; $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $P = Q + Q_{45°}(P-Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



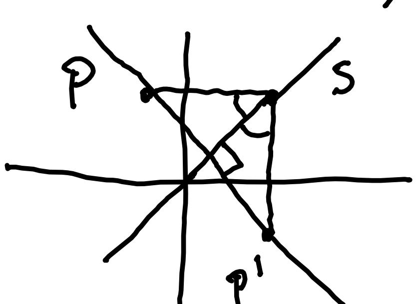

3) $s = R + \langle Q - R \rangle = \langle Q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ : $x = y$. $m = 1$.

4)




$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5)




osserviamo che il segmento $\overline{PP'}$ è ortogonale ad $s$ ed i punti $P$ e $P'$ hanno la stessa distanza da $s$. Quindi

$\mathrm{dist}(P', s) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(P, P') = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = 1 = r$.

$\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-1+\sqrt{2})^2 = 1$ , $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

6) Area $T = \frac{1}{2}\left| \det \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| (1-\sqrt{2})^2 - 1 \right| = |1-\sqrt{2}|$.

**Esercizio 2.** *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche per $r$.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per $s$.*
3. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di $r$ ed $s$.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza tra $r$ ed $s$.*
5. *(1 punto) Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Sol.: 1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

2) $\operatorname{Ker}(1,1,1) = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow \quad s : \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$

3) $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ s ed r sono sghembe.

4) $\operatorname{dist}(r,s) = \dfrac{\left|\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{2}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{2}{2 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5) Area del triangolo $= \dfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} \right\|$

$= 3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{9} = 9.$

**Esercizio 3.** *Consideriamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* $A$.
2. *(1 punto) Calcolare lo spettro* $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ *di* $A$.
3. *(1 punto) Dimostrare che* $A$ *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
4. *(2 punti) Trovare una base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *composta di autovettori per* $A$ *con* $Av_i = \lambda_i v_i$ *e numerarli in modo che* $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. *Sia* $B = (v_1|v_2|v_3)$.
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di* $B$.
6. *(1 punto) Trovare una matrice diagonale* $D$ *tale che* $B^{-1}AB = D$.

Sol.: 1) $Tr(A) = 2$, $Tr(A)^2 = 4$,

$$Tr(A^2) = (16-6-6)+(-6+1+6)+(-6+6+1) = 4+1+1 = 6$$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$P_A(x) = x^3 - Tr(A)x^2 + \frac{1}{2}\left(Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right)x - \det A =$$
$$= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x-1)(x+1)$$

2) $Sp(A) = \{2, 1, -1\}$.

3) $A$ è $3\times 3$ ed ha tre autovalori reali e distinti.

4) $$V_2(A) = Ker(2\mathbb{1}_3 - A) = Ker\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$V_1(A) = Ker(\mathbb{1} - A) = Ker\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1}(A) = Ker(-\mathbb{1} - A) = Ker\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. Per calcolare $B^{-1}$ usiamo l'algoritmo di inversione:

$$(B|\mathbb{1}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&-1&-1\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right). \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

6) $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

**Esercizio 4.** *Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica funzione lineare tale che*

   $$f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_2) = 3v_1 - v_2 + 4v_3, \quad f(v_3) = -v_1 + 5v_2 - 6v_3.$$

   *Trovare la matrice associata ad $f$ nella base $\mathcal{B}$. Chiamarla $A$.*
3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad $f$ nella base standard di $\mathbb{R}^3$. Chiamarla $C$. (Suggerimento: Usare il punto 5 dell'esercizio 3).*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di $f$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di $f$.*

<u>Sol.</u>: 1) $\mathcal{B}$ è la base di autovettori trovata nell'esercizio 3.

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad C = BAB^{-1}$$

usando l'esercizio 3:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 & -4 \\ 14 & -14 & -7 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4) $$C = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -4 \\ 14 & -14 & -7 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(C). \quad \operatorname{Ker} C = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \operatorname{Im} C = \langle C^1, C^2 \rangle.$$

**Esercizio 5.** *Si consideri la base* $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ *dell'esercizio 4.*

1. *(1 punto) Stabilire se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.*
2. *(3 punti) Applicare l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B}$ per trovare una base ortogonale $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$. Descrivere le proprietà di $\mathcal{C}$.*
3. *(1 punto) Normalizzare i vettori della base $\mathcal{C}$ in maniera da ottenere una base ortonormale $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.*
4. *(2 punti) Calcolare le coordinate del vettore $w = (3, 5, -7)$ nella base $\mathcal{E}$.*

Sol.: 1) $\mathcal{B}$ non è ortogonale perché $v_1 \cdot v_2 = 1 \neq 0$.

2) $F_1 = v_1$ ; $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proprietà: 1) $F_i \cdot F_j = 0 \quad \forall i \neq j$. 2) $F_i \cdot v_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$.

3) $\langle v_1 \rangle = \langle F_1 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle F_1, F_2 \rangle$ ; $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$.

3) $\|F_1\| = \sqrt{2}$ ; $\|F_2\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ; $\|F_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$E_1 = \frac{F_1}{\|F_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $E_3 = \frac{F_3}{\|F_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) $w = (w \cdot E_1) E_1 + (w \cdot E_2) E_2 + (w \cdot E_3) E_3$.

$w \cdot E_1 = \frac{8}{\sqrt{2}}$ ; $w \cdot E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(3 - 5 - 14) = -\frac{16}{\sqrt{6}}$ ; $w \cdot E_3 = -\frac{5}{\sqrt{3}}$.