Prova scritta di Geometria 1
Esame in modalità telematica
Durata prova: 2 ore
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

14 Luglio 2020

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti punti del piano:* $P = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Sia* r *la retta passante per i punti* P *e* Q.

1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare il punto* R *ottenuto ruotando il punto* P *di* $45°$ *in senso antiorario attorno al punto* Q.
3. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta* s *passante per i punti* R *e* Q.
4. *(1 punto) Calcolare il punto* P' *ottenuto riflettendo il punto* P *attraverso la retta* s.
5. *(2 punti) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *che ha centro* P' *e tale che la retta* s *sia ad essa tangente.*
6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, P' *ed* R.

Fare i disegni che illustrino la situazione.

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases} \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche per r.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per s.*
3. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza tra r ed s.*
5. *(1 punto) Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Esercizio 3. *Consideriamo la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A*.*
2. *(1 punto) Calcolare lo spettro* $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ *di* A*.*
3. *(1 punto) Dimostrare che* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$*.*
4. *(2 punti) Trovare una base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *composta di autovettori per* A *con* $Av_i = \lambda_i v_i$ *e numerarli in modo che* $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$*. Sia* $B = (v_1|v_2|v_3)$*.*
5. *(1 punto) Calcolare l'inversa di* B*.*
6. *(1 punto) Trovare una matrice diagonale* D *tale che* $B^{-1}AB = D$*.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica funzione lineare tale che*

   $$f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_2) = 3v_1 - v_2 + 4v_3, \quad f(v_3) = -v_1 + 5v_2 - 6v_3.$$

   Trovare la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$. Chiamarla A.
3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad f nella base standard di $\mathbb{R}^3$. Chiamarla C. (Suggerimento: Usare il punto 5 dell'esercizio 3).*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di f.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di f.*

Esercizio 5. *Si consideri la base* $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ *dell'esercizio 4.*

1. *(1 punto) Stabilire se* $\mathcal{B}$ *è una base ortogonale di* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.
2. *(3 punti) Applicare l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base* $\mathcal{B}$ *per trovare una base ortogonale* $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$. *Descrivere le proprietà di* $\mathcal{C}$.
3. *(1 punto) Normalizzare i vettori della base* $\mathcal{C}$ *in maniera da ottenere una base ortonormale* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ *di* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.
4. *(2 punti) Calcolare le coordinate del vettore* $w = (3, 5, -7)$ *nella base* $\mathcal{E}$.