Programma del corso “Geometria 1”
Sapienza-Università di Roma
Ingegneria Chimica
a.a. 2019/2020
Docente: Prof. Giovanni Cerulli Irelli

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Programma di massima

Sistemi di equazioni lineari :

Formalismo vettoriale
- Matrici
- Matrici associate a sistemi di equazioni lineari
- Sistemi di equazioni lineari come equazioni vettoriali
- Teorema di Rouchè-Capelli
- Forma parametrica delle soluzioni

Metodi di risoluzione
- Eliminazione di Gauss
- Decomposizione LU
- Decomposizione QR
- Formula di Cramer (quando applicabile)

Applicazioni
- Circuiti elettrici
- Reti di flusso (stradale o idraulico)
- Approssimazione di dati statistici

Spazi vettoriali :

- Esempi ($\mathbb{R}^n$, vettori geometrici del piano e dello spazio, polinomi di grado minore o uguale ad n, funzioni continue reali di variabile reale)
- Combinazioni lineari
- Dipendenza ed indipendenza lineare
- Basi
- Dimensione
- Sottospazi vettoriali
- Sottospazi affini
- Formula di Grassmann

Applicazioni lineari :

- Definizione
- Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare
- Teorema della dimensione
- Matrice associata ad un'applicazione lineare in due basi date
- Moltiplicazione righe per colonne di matrici
- Inversa di una matrice quadrata
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Algoritmo di inversione

Determinante :

- Definizione e proprietà
- Sviluppo di Laplace
- Teorema di Binet
- Tecniche di calcolo del determinante
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Teorema di Cayley-Hamilton
  - Formula di Cramer

Spazi metrici :

- Forme bilineari
- Forme quadratiche
- Prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale
- Norma
- Angoli
- Distanza tra sottospazi affini

Approssimazioni lineari :

- Proiezione ortogonale
- Soluzioni approssimate di un sistema non risolubile di equazioni lineari
- Equazioni normali di un sistema di equazioni lineari
- Tecniche di calcolo delle soluzioni approssimate
- Polinomio approssimante di dati statistici

Autovalori ed autovettori :

- Interpretazione geometrica
- Matrici diagonalizzabili
- Teorema spettrale per matrici reali simmetriche

Coniche :

- Classificazione affine e metrica delle coniche

Tutti i risultati (a parte il teorema fondamentale dell'algebra) sono stati dimostrati a lezione.

Diario delle lezioni

Settimana 1: Mar 24/09: Presentazione del corso. Definizione di gruppo commutativo (o abeliano). Definizione di campo. Definizione di numeri complessi. I numeri complessi formano un campo.

Mer 25/09: Modulo e coniugato di un numero complesso e loro proprietà. Teorema fondamentale dell'algebra. Decomposizione di un polinomio in fattori irriducibili. Molteplicità algebrica delle radici di un polinomio. Forma trigonometrica dei numeri complessi.

Giov 26/09: Definizione di matrici di taglia $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Matrice di adiacenza ad un grafo orientato. Definizione di somma di matrici. Le matrici $m \times n$ formano un gruppo rispetto alla somma. Prodotto di uno scalare per una matrice. Proprietà del prodotto per scalari. Comandi MATLAB per definire una matrice, la somma di matrici, la matrice nulla.

Ven 27/09: Insieme dei polinomi in una indeterminata, somma e prodotto di polinomi. Divisione tra polinomi. Teorema di Ruffini (un polinomio P(x) è diviso con resto zero dal polinomio lineare (x-a) per ogni sua radice a).

Settimana 2: Mar 01/10: Definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Definizione di vettore. Vettori geometrici del piano: definizione di segmenti orientati congruenti, definizione di vettore geometrico applicato ad un punto O. Definizione di segmenti orientati del piano applicati ad O. Definizione di somma tra segmenti orientati applicati ad O. I segmenti orientati applicati a O con la somma sono un gruppo abeliano. Definizione di prodotto per scalari. Proprietà del proddotto per scalari. I segmenti orientati del piano applicati ad un punto O formano uno spazio vettoriale reale. Altri esempi di spazi vettoriali: matrici $m \times n$, matrici colonna, polinomi, polinomi di grado minore o uguale ad n, funzioni reali di variabile reale.

Mer 02/10: Proprietà degli spazi vettoriali (legge di cancellazione per la somma, unicità dell'opposto, legge di annullamento). Combinazioni lineari. Rette per O come sottospazi vettoriali dei vettori geometrici applicati ad O. Definizione di Col(A) per una matrice $m \times n$. Sottospazi vettoriali. L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale. Teorema: L'insieme delle combinazioni lineari di $\mathbb{K}$ vettori dati è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente tali vettori. Sottospazio generato.

Giov 03/10: Generatori standard dello spazio vettoriale delle matrici colonne. Generatori standard dello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di n. Lemma di scambio. Esercizi sul lemma di scambio. Dipendenza lineare. Indipendenza lineare.

Ven 04/10: Lemma di dipendenza lineare. Lemma di indipendenza lineare. Teorema fondamentale sull'indipendenza lineare. Definizione di base. Teorema: uno spazio vettoriale finitamente generato ammette una base (algoritmo di generazione di basi). Dimensione.

Settimana 3: Mar 08/10: Richiami su basi e dimensione di spazi vettoriali. Lo spazio vettoriale dei vettori geometrici dello spazio. La dimensione di uno spazio vettoriale dipende dal campo sul quale si sta lavorando (ad esempio $\mathbb{C}$ ha dimensione 2 su $\mathbb{R}$ ed 1 su $\mathbb{C}$). Coordinate di un vettore in una base. La funzione coordinate in una base è biiettiva. La dimensione di un sottospazio vettoriale è minore od uguale alla dimensione dello spazio vettoriale. Teorema del completamento ad una base.

Mer 09/10: Esercizi sul teorema del completamento ad una base. Somma di sottoinsiemi di uno spazio vettoriale. Definizione di sottospazio affine. Definizione di punto, retta, piano ed iperpiano di uno spazio vettoriale. Somma di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann.

Giov 10/10: Definizione di funzione (o applicazione) lineare. Esempi (valutazione di un polinomio in un numero, coniugio) e non-esempi (l'n-esima potenza è lineare se e solo se n=1, funzione traslazione) di funzioni lineari. La funzione "coordinate in una base" è lineare. Trasposta di una matrice. La trasposta è una funzione lineare. Comando MATLAB per la trasposta. Matrici simmetriche ed anti-simmetriche. Ogni matrice quadrata è la somma di una matrice simmetrica ed una anti-simmetrica. Una funzione lineare manda il vettore nullo nel vettore nullo. Una funzione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base.

Ven 11/10: Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Il nucleo è un sottospazio vettoriale. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è banale. La funzione cubo è iniettiva. L'immagine di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale. Isomorfismi lineari.

Settimana 4: Mar 15/10: Esercizi su applicazioni lineari, base del nucleo e base dell'immagine. Isomorfismi lineari. Una funzione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è banale. Composizione di funzioni. La composizione di funzioni lineari è lineare. Inversa destra ed inversa sinistra di una funzione. Inversa di una funzione. Una funzione ammette inversa se e solo se è iniettiva e suriettiva. L'inversa di un isomorfismo lineare è lineare.

Mer 16/10: Correzione di alcuni esercizi settimanali. Vettori direttori di un sottospazio affine. Applicazioni lineari tra $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$. Moltiplicazione tra una matrice $m \times n$ ed una matrice colonna $n \times 1$. La funzione moltiplicazione a sinistra per una matrice è lineare. Moltiplicazione righe per colonne tra una matrice $m \times n$ ed una matrice $n \times p$. Comando MATLAB per la moltiplicazione righe per colonne: *.

Giov 17/10 DALLE 08 ALLE 10: Lezione in Laboratorio di via Tiburtina 205

Ven 18/10: Esercizi sul prodotto righe per colonne. Matrice identità. Proprietà del prodotto righe per colonne.

Settimana 5: Mar 22/10: Teorema della dimensione. Esercizi su nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Nucleo ed immagine di una matrice. Rango di una matrice. Il rango di una matrice $m \times n$ è uguale a n meno la dimensione del suo nucleo. Equazioni lineari in n variabili. Sistemi di equazioni lineari (o più brevemente sistemi lineari). Sistemi risolubili (o compatibili). Matrice associata ad un sistema di equazioni lineari. Matrice completa di un sistema di equazioni lineari. Teorema di Rouchè-Capelli: un sistema è risolubile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Esempi e primi esercizi sui sistemi lineari.

Mer 23/10: Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare (risolubile). Esempi ed esercizi sui sistemi lineari. Comandi MATLAB: null, $A \setminus b$.

Giov 24/10: Matrici a scala. Sistemi a scala. I sistemi a scala si risolvono per sostituzione all'indietro. Matrici a scala ridotta. Sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Matrici equivalenti per righe. Teorema fondamentale sulla riduzione a scala (solo enunciato): Ogni matrice è equivalente per righe ad un unica matrice a scala ridotta. Comando MATLAB: rref.

Ven 25/10: Esercizi sui sistemi lineari, anche dipendenti da parametro.

Settimana 6: Mar 29/10: Rango e base dell'immagine di una matrice a scala. Dimostrazione del teorema fondamentale sulla riduzione a scala. Applicazioni della riduzione a scala: per il calcolo di una base del nucleo di una matrice; per il calcolo del rango di una matrice; per il calcolo di una base dell'immagine di una matrice.

Mer 30/11: Matrici invertibili. Criteri equivalenti per l'invertibilità di una matrice. Applicazioni della riduzione a scala: per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile (algoritmo di inversione). Inversa di una matrice 2×2. Determinante di una matrice 2×2.

Giov 31/10: Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^m$. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{K}^m$. Algoritmo di inversione generalizzato: per trovare le equazioni cartesiane sapendo le equazioni parametriche. Per trovare le equazioni parametriche da quelle cartesiane bisogna risolvere un sistema lineare. Esempi ed esercizi.

Settimana 7: Mar 05/11: Rango-riga di una matrice. Il Rango-riga è uguale al rango della matrice trasposta. Teorema di decomposizione reale. Corollario: il rango-riga è uguale al rango (per matrici reali). Matrici invertibili: condizioni equivalenti di invertibilità. Inversa del prodotto. Inversa della trasposta. Inversa di una matrice 2×2.

Mer 06/11: Il rango-riga è uguale al rango in ogni campo. Teorema di decomposizione complesso. Matrici elementari: le operazioni elementari sulle righe di una matrice equivalgono a moltiplicare la matrice a sinistra per una matrice elementare. Teorema: Se A è equivalente per righe a B allora esiste T invertibile tale che B=TA; T è prodotto di matrici elementari e si trova con l'algoritmo di inversione generalizzato: $(A|1) - - > (B|T)$.

Giov 07/11: Una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari. Operazioni elementari sulle colonne di una matrice. Le operazioni elementari sulle colonne di una matrice equivalgono a moltiplicare a destra per una matrice elementare. Funzioni dalle matrici quadrate al campo: funzioni alternanti sulle righe, funzioni alternanti sulle colonne, funzioni multilineari sulle righe, funzioni multilineari sulle colonne. Teorema: esiste un'unica funzione multilineare, alternante e che vale 1 sull'identità; tale funzione si chiama determinante.

Ven 08/11: Dimostrazione dell'esistenza ed unicità del determinante. Determinanti di matrici a scala. Calcolo del determinante attraverso operazioni elementari sulle righe. Il determinante dell'inversa è uguale all'inverso del determinante. Teorema:

il determinante della trasposta di una matrice è uguale al suo determinante. Calcolo del determinante attraverso operazioni elementari sulle colonne.

Settimana 8: Mar 12/11: Calcolo del determinante attraverso lo sviluppo di Laplace lungo una riga o una colonna. Per calcolare il determinante: utilizzare le operazioni elementari sulle righe o sulle colonne per creare una riga o una colonna che contenga tanti zeri e poi utilizzare Laplace. Cofattori. Matrice aggiunta o dei cofattori. Formula di Cramer per il calcolo di una matrice invertibile. Esempi ed esercizi.

Mer 13/11: Utilizzo del determinante per risolvere sistema non-singolari. Definizione di minore di ordine $\mathbb{K}$ di una matrice. Comando MATLAB per estrarre i minori di una matrice. Minori principali di una matrice. Sottomatrice orlata. Minore orlato. Utilizzo del determinante per il calcolo del rango: teorema degli orlati. Esempi ed esercizi.

Giov 14/11: Determinante di matrici a blocchi triangolari. Geometria affine di $\mathbb{R}^2$: condizione di parallellismo di due rette in forma cartesiana; intersezione di due rette in forma cartesiana.

Ven 15/11: Intersezione di sottospazi affini. Geometria affine di $\mathbb{R}^2$: condizione di parallelismo di due rette; condizioni di intersezione di due rette; fascio di rette per un punto; retta per due punti distinti. Primi cenni alla geometria euclidea standard di $\mathbb{R}^2$: definizione di prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$ e sue proprietà; norma; angoli; ortogonalità di due vettori e di due rette.

Settimana 9: Mar 19/11: Ancora sulla geometria del piano: Angoli tra due rette. Sottospazio ortogonale. Proiezione ortogonale di un vettore su un altro vettore (non-nullo). La proiezione ortogonale di w su v è il multiplo di v più vicino a w (dimostrazione analitica). Riferimento cartesiano dello spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano. Teorema: la funzione coordinate rispetto ad un riferimento cartesiano preserva le distanze e gli angoli.

Mer 20/11: Ancora sulla geometria del piano: Disuguaglianza triangolare. Teorema di Pitagora. La proiezione ortogonale di w su v è il multiplo di v più vicino a w (dimostrazione algebrica). Decomposizione ortogonale di $\mathbb{R}^2$. Insiemi ortogonali. Basi ortogonali. Coefficienti di Fourier. Versori. Insiemi convessi. Inviluppo convesso di n punti del piano. L'inviluppo convesso di n punti del piano è convesso, ed è il più piccolo convesso contenente gli n punti (senza dimostrazione). Determinante di una matrice 2×2 come area orientata. Calcolo dell'area di un triangolo. Calcolo dell'aerea dell'inviluppo convesso di n punti del piano.

Giov 21/11: Lezione in laboratorio di via Tiburtina 205 per l'utilizzo di MATLAB per la risoluzione di esercizi di algebra lineare e geometria.

Ven 22/11: Ancora sulla geometria euclidea del piano: Distanza punto-retta; Pendenza e coseni direttori di una retta; formula per la tangente dell'angolo formato da due rette; circonferenza: equazione parametrica e cartesiana; retta tangente ad una circonferenza in un dato punto. Esempi ed esercizi.

Settimana 10: Mar 26/11: Geometria affine di $\mathbb{R}^3$: condizioni di parallelismo di due rette (nelle varie forme); condizioni di incidenza di due rette (nelle varie forme); rette sghembe (nelle varie forme). Posizione reciproca retta/piano e piano/piano (in alcune forme).

	Mer 27/11: Geometria euclidea di $\mathbb{R}^3$: prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$; norma; distanza; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; angoli; versori; rappresentazione grafica di $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard; proiezione ortogonale; teorema di decomposizione ortogonale; interpretazione geometrica dei coefficienti delle equazioni che definiscono rette e piani; basi ortonormali; coefficienti di Fourier; orientazione; basi equiverse e contraverse; definizione di prodotto vettoriale; il prodotto vettoriale tra v e w è ortogonale sia a v che a w.
	Giov 28/11: Ancora sulla Geometria euclidea di $\mathbb{R}^3$: proprietà del prodotto vettoriale: bilineare, anti-simmetrico, non è associativo. La norma del prodotto vettoriale è uguale all'area di un parallelogramma; verso del prodotto vettoriale; prodotto misto di tre vettori; Il determinante come volume orientato. Distanza punto-retta; distanza punto-piano; distanza retta-retta.
	Ven 29/11: Forme bilineari; prodotti scalari (reali); esempi di prodotti scalari: prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, prodotto scalare sui polinomi di grado al più n, prodotto scalare L^2 sulle funzioni reali continue su un intervallo chiuso di R; prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$; definizione di norma indotta da un prodotto scalare. Matrice associata ad una forma bilineare in una base fissata
Settimana 11:	Mar 03/12: Isometrie del piano. Una isometria che fissa l'origine è lineare e preserva il prodotto scalare. Le traslazioni sono isometrie. La composizione di isometrie è un'isometria. Le isometrie sono invertibili. Ogni isometria è la composizione di una traslazione con una isometria lineare. Classificazione delle isometrie lineari del piano: matrici di rotazione e matrici di riflessione. Matrice di riflessione rispetto ad una retta di pendenza m.
	Merc 04/12: Miscellanea di esercizi di geometria del piano e dello spazio e nuovi concetti per risolverli: Stella di piani per un punto dello spazio, Fascio di piani per una retta, interpretazione geometrica dei coefficienti delle equazioni che definiscono un piano o una retta, versori normali ad un piano in forma cartesiana, versori direttori ad una retta in forma cartesiana, fascio di rette per due rette del piano, rette tangenti ad una circonferenza del piano e passante per un punto esterno alla circonferenza (esse sono le uniche rette passanti per il punto che distano dal centro il raggio della circonferenza).
	Giov 05/12: Matrice associata ad un'applicazione lineare. Matrice del cambiamento di base. Esempi ed esercizi.
	Ven 06/12: Esempi ed esercizi riguardo a matrice associata ad un'applicazione lineare: matrici di riflessione rispetto ad una retta di pendenza m; matrici di rotazione; realizzazione delle trasformazioni del piano come moltiplicazione sinistra per una matrice 3x3 (computer grafica); Esercizi su isometrie del piano: rotazione attorno ad un punto diverso dall'origine e riflessione rispetto ad una retta che non passa per l'origine. Proiettori su un sottospazio vettoriale lungo un sottospazio complementare. Matrice che rappresenta il proiettore ortogonale su una retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e di pendenza m.
Settimana 12:	Mar 10/12: Endomorfismi lineari diagonalizzabili (definizione). Un endomorfismo lineare è diagonalizzabile se e solo se esistono n assi di simmetria, dove n è la

dimensione dello spazio vettoriale sul quale agisce. Matrici diagonalizzabili. Matrici simili. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se è simile ad una matrice diagonale. Autovalori e autovettori di un endomorfismo lineare. Un endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale V è diagonalizzabile se e solo è esiste una base di V composta di autovettori per l'endomorfismo. Polinomio caratteristico. Polinomio caratteristico di una matrice 2×2. Polinomio caratteristico di una matrice 3×3. Traccia di una matrice. Il polinomio caratteristico è invariante per similitudini.

Merc 11/12: Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo lineare (in basi diverse). La funzione coordinate in una base di $\mathbb{K}^n$ è la moltiplicazione a sinistra per l'inversa della matrice avente per colonne gli elementi della base. Se il polinomio caratteristico di una matrice ha una radice fuori dal campo allora la matrice non è diagonalizzabile sul campo. Spettro di una matrice. Da adesso in poi il campo è assunto $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Spettro reale (o razionale) e spettro complesso. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. La molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.Teorema di caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili: una matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se il suo spettro è in $\mathbb{K}$ e la molteplicità geometrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità algebrica.

Giov 12/12: Spettro di una matrice triangolare (inferiore o superiore). Una matrice $n \times n$ avente n autovalori disitinti in $\mathbb{K}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$. Esempi ed esercizi sulla diagonalizzabilità di alcune matrici 2×2 e 3×3. Blocco di Jordan $n \times n$ di autovalore λ (definizione). Il blocco di Jordan non è diagonalizzabile. Teorema di Cayley-Hamilton. Utilizzo del teorema di Cayley-Hamilton per calcolare l'inversa di una matrice invertibile. Dimostrazione della formula dell'inversa di una matrice 2×2 utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.

Settimana 13: Mar 17/12: Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^n$. Teorema di decomposizione ortogonale. Proiezione ortogonale. Matrice associata alla proiezione ortogonale su un sottospazio nella base standard di $\mathbb{R}^n$. Algortimo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Sistemi lineari non-risolubili. Soluzioni approssimate di sistemi lineari non-risolubili nel senso dei minimi quadrati. Sistema di equazioni normali. Cenni su: Polinomio interpolatore; matrice di Vandermonde; determinante di Vandermonde; polinomio apporossimante.

Merc 18/12: Sottospazi invarianti per un endomorfismo. Somma diretta di sottospazi invarianti e matrice associata. Matrici reali ortogonalmente diagonalizzabili. Teorema spettrale reale: 1) gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali; 2) autospazi relativi ad autovalori distinti di una matrice simmetrica sono ortogonali; 3) la molteplicità algebrica di un autovalore di una matrice simmetrica è uguale alla sua molteplicità algebrica. Esempi ed esercizi.

Giov 19/12: Classificazione affine e metrica delle coniche.

Roma, 01.09.2020

Prof. Giovanni Cerulli Irelli

Giovanni Cerulli Irelli