Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedí 08 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Siano* $u, v, w \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. *Dire, motivando la risposta, se* $\langle w \rangle \subset \langle u, u+v \rangle$ *o se* $\langle w \rangle = \langle u, u+v \rangle$, *nei seguenti casi:*

1. $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $u = -v$, $w = 2(u+v)$.

Sol.: Osserviamo che $\langle u, u+v \rangle = \langle u, v \rangle$ per il lemma di scambio.

1. $w \notin \langle u, v \rangle$ poiché l'entrata $(1,1)$ di w è diversa da zero. Ne segue che $\langle w \rangle \not\subset \langle u, u+v \rangle$

2. $w = v - 3u \Rightarrow w \in \langle u, v \rangle \Rightarrow \langle w \rangle \subset \langle u, v \rangle$.
Inoltre, $\langle w \rangle \neq \langle u, v \rangle$ poiché u non è un multiplo di w e quindi $\langle u, v \rangle \not\subset \langle w \rangle$.

3. $w = 2(u+v) = 2 0_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})} = 0_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})} \in \langle u, v \rangle$.

$\langle w \rangle = \langle 0_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})} \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow u = v = 0_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})}$

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $n \in \mathbb{N}$ e siano $u, v \in \mathbb{K}^n$. Calcolare $U \cap V$, motivando la risposta, nei seguenti casi:*

1. $U = \langle u, u+v \rangle$ *e* $V = \langle 2u + v \rangle$;
2. $U = \langle u+v, u-v \rangle$ *e* $V = \langle u, v \rangle$;
3. $U = \langle u+v \rangle$ *e* $V = \langle u + 2v \rangle$.

Sol.: 1. $2u+v = u+(u+v) \in U \Rightarrow V \subseteq U \Rightarrow U \cap V = V$

2. $U \subseteq V$ quindi $U \cap V = U$.
Possiamo anche osservare che se $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$ allora

$$\left.\begin{array}{l} 2u = (u+v)+(u-v) \in U \Rightarrow u \in U \\ -2v = -(u+v)+(u-v) \in U \Rightarrow v \in U \end{array}\right\} \Rightarrow V \subseteq U \Rightarrow U = V = U \cap V.$$

3. Ci sono due possibilità: $U \cap V = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ oppure $U \cap V = U = V$.
Se $v \in \langle u \rangle$ allora $U = \langle u+v \rangle = \langle u \rangle = \langle u+2v \rangle = V$ e $U \cap V = U = V$.
Se $v \notin \langle u \rangle$ allora se $U \cap V = U = V$ si avrebbe che $\exists\, t \in \mathbb{K}$ tale che $u+v = t(u+2v)$ ovvero $(1-t)u = (2t-1)v$
se $2t-1 \in \mathbb{K}$ fosse invertibile si avrebbe la contraddizione

$$v = \frac{1-t}{2t-1} u \in \langle u \rangle$$

Quindi $2t-1 = 0$ ovvero $2t = 1$ ovvero $t = \frac{1}{2}$ (e $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$).
In questo caso, $\frac{1}{2} u = 0$ ovvero $u = 0$.
Concludiamo che se $v \notin \langle u \rangle$ allora

$U \cap V = \{0\}$ se $u \neq 0$ e

$U \cap V = U = V = \langle v \rangle$ se $u = 0$.

Esercizio 3. 1. *Enunciare e dimostrare il lemma di scambio.*

2. *Utilizzare (ripetutamente) il lemma di scambio e l'esistenza di generatori standard per dimostrare le seguenti uguaglianze di spazi vettoriali:*

   a) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 2, 1 - x + x^2, 3x + x^2 \rangle$;

   b) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1 - x, 1 + x, x^2 \rangle$;

   c) $\mathbb{R}^{1\times 2} = \langle (1, 1), (2, -1) \rangle$.

3. *Dimostrare le uguaglianze del punto precedente direttamente.*

<u>Sol.</u>: <u>1</u>. <u>Lemma di scambio</u>.

$\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, $U = \langle \tau \rangle$, $u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U$.

Se $t_i \neq 0$ allora $\langle \tau \rangle = \langle \tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$.

<u>dim</u>: Chiaramente $\langle \tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \subseteq \langle \tau \rangle$.

Per dimostrare l'altra inclusione notiamo che

$$v_i = -\frac{1}{t_i} u - \sum_{j \neq i} \frac{t_j}{t_i} v_j \in \langle \tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle.$$

$\Rightarrow \tau \subset \langle \tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \Rightarrow \langle \tau \rangle \subseteq \langle \tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$. ∎

2a) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1, x, x^2 \rangle$. $u_1 := 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 2, x, x^2 \rangle$.

$u_2 = 1 - x + x^2 = \frac{1}{2} 2 - x + x^2 \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, x^2 \rangle$. $u_3 = 3x + x^2 =$

$= -3(1 + x + x^2) + \frac{3}{2} 2 + 4x^2 \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

3a) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{4a_0 + a_1 - 3a_2}{8} 2 + \frac{3a_2 - a_1}{4} (1 - x + x^2) + \frac{a_1 + a_2}{4} (3x + x^2)$

2b) $u_1 = 1 - x = 1 \cdot 1 + (-1)x + 0x^2 \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, x, x^2 \rangle$. $u_2 = 1 + x = 1(1-x) + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, x^2 \rangle$.

3b) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1 - x) + \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1 + x) + a_2 x^2$

2c) $\mathbb{R}^{1\times 2} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$. $u_1 = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow \mathbb{R}^{1\times 2} = \langle u_1, (0,1) \rangle$.

$u_2 = (2,-1) = 2(1,1) - 3(0,1) \Rightarrow \mathbb{R}^{1\times 2} = \langle u_1, u_2 \rangle$.

3c) $(a, b) = \frac{1}{3}(a + 2b)(1,1) + \frac{1}{3}(a - b)(2, -1)$.

Esercizio 4. *Determinare se l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmwente indipendente oppure linearemente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,2)$, $v_3 = (-1,1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$;
2. $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (-1,1,0) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$;
3. $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (1,2,0,1)$, $v_3 = (-1,1,0,1) \in \mathbb{R}^{1\times 4}$;
4. $v_1 = 1+x$, $v_2 = 1+x-x^2$, $v_3 = 1+x+x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
5. $v_1 = \sin(x)$, $v_2 = \sin(2x)$, $v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Sol.: 1. Lin. Dip. : $-3(1,1)+2(1,2)-(-1,1)=(0,0)$

2. $\{v_1,v_3\}$ è lin. Ind. poiché $v_3 \notin \langle v_1 \rangle$.
$\{v_1,v_2,v_3\}$ è lin. Ind. poiché $v_2 \notin \langle v_1, v_3 \rangle$.

3. $\{v_1,v_2\}$ è lin. Ind. poiché $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$. $v_3 = t_1 v_1 + t_2 v_2 \iff \begin{cases} t_1+t_2 = 1 \\ t_1+t_2=-1 \end{cases}$
$\Rightarrow v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ è lin. Ind.

4. $\{v_1,v_2\}$ è lin. Ind. poiché $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$. $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ perché
$gr(v_3) = 3 > gr(v_2), gr(v_1)$. $\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ è lin. Ind.

5. $t_1 \sin(x) + t_2 \sin(2x) + t_3 \sin(3x) = 0 \quad \forall x$

$x=\frac{\pi}{2}$ $t_1 - t_3 = 0$

$x=\frac{\pi}{3}$ $t_1\frac{\sqrt{3}}{2} + t_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$x=\frac{\pi}{4}$ $t_1\frac{\sqrt{2}}{2} + t_2 + t_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_3 \\ t_1 = -t_2 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) t_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ è lin. Ind.

Esercizio 5. *1. Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$.

2. Esprimere i seguenti vettori come combinazione lineare di ognuna delle basi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: 1. Dato che $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = |\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_3|$, basta dimostrare che sono lin. indipendenti.
Ma questo segue dal fatto che i due vettori non sono uno multiplo dell'altro.

2.
$$v_1 = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 14\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{35}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{28}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$