Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 3
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 15 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0,\, x_3 - 2x_4 = 0\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$.
2. *Trovare una base di* U.
3. *Trovare una base di* $U \cap W$.
4. *Trovare una base di* $U + W$.

Sol.:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ quindi U è un sottospazio vettoriale ed una sua base è costituita dalle soluzioni-base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 - \dim(U \cap W)$.

$0 \leq \dim U \cap W \leq 2$, $\quad 2 \leq \dim U + W \leq 4$.

Ci sono 3 possibilità:

1) $\dim U \cap W = 0 \Rightarrow \dim U + W = 4$
2) $\dim U \cap W = 1 \Rightarrow \dim U + W = 3$
3) $\dim U \cap W = 2 \Rightarrow \dim U + W = 2$

1) non è possibile perché $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ e $e_1 \notin W$.

3) non è possibile perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ e quindi $U \neq W$.

Concludiamo che $\dim U \cap W = 1$ e $\dim U + W = 3$.

Cerchiamo una base di $U \cap W$: notiamo che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in U \text{ e quindi } U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e}$$

$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U \cap W$.

Per trovare una base di $U+W$ estendiamo $\mathcal{B}_{U \cap W}$ ad una base di U:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Concludiamo che una base di $U+W$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

come abbiamo visto nella dimostrazione della formula di Grassmann.

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \right\}, \quad W = \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^3$ *esibendo un sottospazio vettoriale* U_0 *ed un vettore* v *tale che* $U = v + U_0$.
2. *Calcolare la dimensione di* U.
3. *Determinare se* U *sia un punto, una retta, un piano o tutto lo spazio.*
4. *Determinare* $U \cap W$.

Sol.: Consideriamo il sottospazio vettoriale

$$U_0 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -2x_2 - 3x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Scegliamo arbitrariamente $v \in U$, ad esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dimostriamo che $v + U_0 = U$

Preso $X \in U_0$, $v + X = \begin{pmatrix} x_1+1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $(x_1+1) + 2x_2 + 3x_3 = 1$, quindi $v + X \in U \Rightarrow v + U_0 \subseteq U$.

Viceversa, se $X \in U$ allora $X - v \in U_0$ e quindi $X \in v + U_0$ $\Rightarrow U \subseteq v + U_0$.

La dimensione di U è 2 e quindi U è un piano di $\mathbb{R}^3$.

4. $t(e_1+e_3) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \in U \iff 4t = 1 \iff t = \frac{1}{4}$

Quindi

$$U \cap W = \left\{ \frac{1}{4}(e_1+e_3) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Sia $U = \langle \mathcal{B} \rangle$. Consideriamo i seguenti vettori di U:*

$$z_1 = 2v_1 - v_3, \quad z_2 = 2v_2 + v_3.$$

1. *Dimostrare che $\{z_1, z_2\}$ è linearmente indipendente.*
2. *Trovare due indici distinti i_1 e i_2 tali che $U = \langle \mathcal{B} \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{z_1, z_2\} \rangle$.*
3. *Trovare un indice i tale che $\{z_1, z_2, v_i\}$ è linearmente indipendente.*

Si vedano le soluzioni dell'esercizio 3 del foglio di esercizi della settimana 3 per ingegneria civile.

Esercizio 4. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi $\mathcal{B}$ dell'opportuno spazio vettoriale, stabilre se forma una base e nel caso la formi, calcolare $F_{\mathcal{B}}(v)$ ed $F_{\mathcal{B}}^{-1}(X)$. (Si ricordi che $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è la funzione "coordinate" nella base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Abbiamo dimostrato che tale funzione è iniettiva e suriettiva, quindi invertibile. L'inversa $F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$ associa ad $X = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ il vettore $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$.)*

1. $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $v = 2$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. *Sia* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *generato da tre vettori* v_1, v_2, v_3. *Si considerino:*
   $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\} \subset V$, $v = v_1$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si vedano le soluzioni dell'esercizio 4 del foglio di esercizi della settimana 3 ad ingegneria civile.

Esercizio 5. *Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare.*

1. *Cosa vuol dire che L è lineare? (Dare la definizione.)*
2. *Dimostrare che se L è iniettiva e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ è linearmente indipendente, allora anche $L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), L(v_2), L(v_3)\} \subset W$ è linearmente indipendente. Generalizzare ad un insieme linearmente indipendente $\mathcal{B}$ con un numero k arbitrario di elementi.*
3. *Dimostrare che se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, allora $L(U) = \{L(u) |\, u \in U\} \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale.*
4. *Dimostrare che se $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V ed L è lineare, iniettiva e suriettiva, allora $L(\mathcal{B})$ è una base di W.*

Sol.: 1. $L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

2. $\alpha L(v_1) + \beta L(v_2) + \gamma L(v_3) = 0_W \Rightarrow L(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = 0_W$

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \in \operatorname{Ker} L = \{0_V\} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_V$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$ (L iniettiva)

$\mathcal{B}$ Lin. Ind.

3. $\alpha L(u_1) + \beta L(u_2) = L(\alpha u_1 + \beta u_2) \in L(U)$ $\forall u_1, u_2 \in U$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

4. $L(\mathcal{B})$ è lin. Ind. per il punto 2.

$\forall w \in W\ \exists!\ v \in V$ t.c. $L(v) = w$.

Poiché $\mathcal{B}$ è una base di V, esistono $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$. Quindi

$w = L(v) = L(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = t_1 L(v_1) + \dots + t_n L(v_n)$

e quindi $L(\mathcal{B})$ genera W.