Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 5
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 29 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di ognuna delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Sol.</u>: 1. $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\} \Rightarrow$ base di $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

$\operatorname{Col} A = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right> \Rightarrow$ base di $\operatorname{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. Le colonne di B sono lin. Ind.. Quindi $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ e $\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^2$

3. $\operatorname{Col}(C) = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right> \Rightarrow \operatorname{rg} C = 1$

$\operatorname{Ker} C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\} \Rightarrow$ Base di $\operatorname{Ker} C = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Le colonne di D sono lin Ind. Quindi $\operatorname{Ker} D = \{0\}$ e

$\operatorname{Im} D = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right>$

Esercizio 2. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - 2R_3 \\ R_1 \mapsto R_1 + R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 + R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto -R_2 \\ R_3 \mapsto -R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}\, A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_3 \mapsto -\frac{1}{2} R_3 \\ R_2 \mapsto -R_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_3 \\ R_1 \mapsto R_1 - R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 - R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(B)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto -R_2 \\ R_3 \mapsto -\frac{1}{2} R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_3 \\ R_1 \mapsto R_1 - R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 - R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(C)$$

Esercizio 3. *1. Descrivere tutte le possibili matrici 2×2 a scala ridotte.*

2. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nei parametri reali a, b, c, d, trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)

Sol. :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Se $a \neq 0$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

i) Se $a \neq 0$ e $ad-bc \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = rref(A)$$

ii) Se $a \neq 0$ e $ad-bc=0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rref(A)$$

Se $a=0$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$

i) Se $bc \neq 0$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = rref(A)$

ii) Se $b=0$ e $c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rref(A)$$

iii) Se $b \neq 0$ e $c=0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rref(A)$$

iv) Se $b=0$ e $c=0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $d=0$, $A = 0_{2\times 2} = rref(A)$

Se $d \neq 0$ $rref(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri il seguente sistema lineare reale:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 1 \end{cases}$$

1. *Scrivere la matrice dei coefficienti del sistema e denotarla A.*

2. *Scrivere la matrice completa del sistema e denotarla $\hat{A}$.*

3. *Trovare la forma a scala ridotta di $\hat{A}$ e denotarla $\hat{R}$.*

4. *La matrice $\hat{R}$ è la matrice completa di un sistema che è equivalente al sistema iniziale. Scrivere tale sistema e trovare tutte le sue soluzioni (che quindi sono anche le soluzioni del sistema iniziale).*

5. *Verificare il risultato con MATLAB.*

Sol.: 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

3. $\hat{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & -3 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 14/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 52/9 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/3 \end{array}\right) = \hat{R}$

4. $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} - \frac{52}{9} x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} x_4 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} x_4 \end{cases}$ soluzioni $= \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -52 \\ 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio 5. *Studiare (ovvero stabilire se è risolubile e nel caso lo sia trovare tutte le soluzioni) del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + x_2 + (1-2k)x_3 + kx_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 + (k^2-k+1)x_4 + (2k)x_5 = k \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ K & 1 & 1-2K & K & 1 & 1 \\ 1 & K & K-2 & K^2-K+1 & 2K & K \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & K & K & K^2-K & 2K & K-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & K^2-K & K & K^2-1 \end{array}\right)$$

I pivot sono 1, 1 e $K^2-K = K(K-1)$.

Se $K(K-1) \neq 0$ il sistema è risolubile perché la matrice completa ha rango massimo $=3$.

Se $K(K-1)=0$ allora $K=1$ o $K=0$.

Caso 1: Se $K=0$, la matrice completa del sistema è equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

e quindi non è risolubile.

Se $K=1$ la matrice completa del sistema è equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

quindi è risolubile e le soluzioni sono $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

Se $K(K-1) \neq 0$ allora

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & K(K-1) & K & K^2-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{K+1}{K} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{K-1} & -\frac{1}{K} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{K+1}{K} \end{array}\right)$$

Il sistema è equivalente al sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{K} + 2x_3 + \frac{1}{K-1} x_5 \\ x_2 = 1-K - x_3 - x_5 \\ x_4 = \frac{K+1}{K} - \frac{1}{K-1} x_5 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{K} \\ 1-K \\ 0 \\ \frac{K+1}{K} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{K-1} \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{K-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 6. *Consideriamo le seguenti matrici A e C di taglia 3×4:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcolare rref(A) e rref(C), evidenziando le operazioni elementari effettuate in ogni passaggio. Concludere che A e C sono equivalenti per righe.

Sol:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(A)$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 - R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 3 \\ 0 & 5 & -20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \mapsto 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 6 \\ 0 & 5 & -20 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 5R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 + 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(B)$$

Poiché $\mathrm{rref}(A) = \mathrm{rref}(B)$, $A \sim \mathrm{rref}(A) = \mathrm{rref}(B) \sim B$.