Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 6
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 5 Novembre 2019

Esercizio 1. *Si considerino le seguenti rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad r_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} .$$

1. *Trovare una forma parametrica per* r_1
2. *Trovare una forma cartesiana per* r_2.
3. *Trovare una forma parametrica per* r_3.
4. *Stabilire se i vettori direttori di* r_1 *ed* r_2 *sono linearmente indipendenti.*
5. *Calcolare* $r_1 \cap r_2$.
6. *Calcolare* $r_1 \cap r_3$.
7. *Calcolare* $r_2 \cap r_3$.

Sol. 1. $r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} y = z \\ x = 1-2z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. $\left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ 0 & y+x \\ 0 & z+x \end{array} \right)$ Lo spazio di giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

di r_2 ha equazioni cartesiane $\begin{cases} y + x = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$.

"Imponiamo il passaggio per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

3. r_3 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$.

Le colonne di A, ovvero i vettori direttori di r_1 e r_2, sono Lin Ind.

5. $r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \quad r_2 = \left\{ P_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -1+t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$P_t \in r_1 \iff \begin{cases} t - (-1+t) = 0 \\ (1-t) + t + (-1+t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset .$

6. $r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \quad r_1 \cap r_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$

7. $r_2 = \left\{ P_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -1+t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad r_3 = \left\{ Q_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+s \\ -s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$

$P_t = Q_s \iff \begin{cases} 1 - t = 0 \\ t = 1 + s \\ -1 + t = -s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases}$

$r_2 \cap r_3 = \left\{ P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_0 \right\} .$

Esercizio 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trovare, se esiste, l'inversa di* A.
2. *Dimostrare che* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^2$.
3. *Siano* $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ *e* $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. *Calcolare* $F_{\mathcal{B}}(b_1)$ *e* $F_{\mathcal{B}}(b_2)$.

Sol.: 1. $\det A = 6-2=4 \Rightarrow A$ è invertibile.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. A invertibile $\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow$ le colonne di A sono lin. Ind.

3. $F_{\mathcal{B}}(b_1)$ è la soluzione di $AX=b_1$, ovvero

$$F_{\mathcal{B}}(b_1) = A^{-1}b_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$F_{\mathcal{B}}(b_2)$ è la soluzione di $AX=b_2$, ovvero

$$F_{\mathcal{B}}(b_2) = A^{-1}b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Studiare il sistema* $AX = b$ *per ognuno dei seguenti* b*:*

1. $b = 0_{\mathbb{R}^3}$.
2. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{r} 86- \\ 34 \\ \hline 52 \end{array}$$

Sol.:

1. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 14 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 86/11 \\ 0 & 1 & 0 & 17/11 \\ 0 & 0 & 1 & -14/11 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 52/11 \\ 0 & 1 & 0 & 17/11 \\ 0 & 0 & 1 & -14/11 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -52/11 \\ -17/11 \\ 14/11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -52 \\ -17 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$

Notiamo anche che $Col(A) = \langle A^1, A^2, A^3 \rangle$.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/11 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4/11 \\ 0 & 1 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 5/11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6/11 \\ 0 & 1 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 5/11 \end{array}\right)$. Le soluzioni sono

$\begin{pmatrix} -6/11 \\ 1/11 \\ 5/11 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -52 \\ -17 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -10/11 \\ 0 & 1 & 0 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & 7/11 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4/11 \\ 0 & 1 & 0 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & 7/11 \end{array}\right).$$

Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} -4/11 \\ -3/11 \\ 7/11 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -52 \\ -17 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 4. *Trovare, se esiste, l'inversa della seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

$$(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 3 \\ 3/2 & 3 & -5 \\ -3/2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_5$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= k \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 &= k \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 &= -2k \end{cases}$$

1. *Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *Trovare i valori di k per i quali il sistema è compatibile.*
3. *Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & k \\ 2 & -2 & -1 & 5 & -1 & -2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 & 2k \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & -4k \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -\frac{4}{3}k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}k \end{array}\right)$$

Il sistema è risolubile se e solo se $k=0$

In questo caso

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$