Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 7
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 12 Novembre 2019

Sol.:

1. $\operatorname{Rrg} A = \operatorname{rg} A^t = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & -1+i & 1+i \\ -1+i & -2 & 2i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1+i & -2 & 2i \\ i & -1+i & 1+i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix}$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ i & -1+i & 1+i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+2i & 0 \\ 0 & 3-3i & 3+3i \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

2. Le colonne di A^t sono lin. Ind. quindi le tre righe di A sono Lin Ind. e formano una base di $Row(A$

3. $\operatorname{rg} A = \operatorname{Rrg} A = 3$. Quindi $\operatorname{Im} A = \mathbb{C}^3$. Una sua base è la base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice complessa:*

$$A = \begin{pmatrix} i & -1+i & 2i & 3i \\ -1+i & -2 & -4+4i & 0 \\ 1+i & 2i & 2+2i & 6+6i \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il rango-riga di A.*
2. *Trovare una base di Row(A).*
3. *Trovare una base di Im(A).*
4. *Trovare una base di Ker(A) ed estenderla ad una base di $\mathbb{C}^4$ con il teorema di decomposizione complesso.*

Esercizio 2. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & -4 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa della seguente matrice complessa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Determinare per quali* $b \in \mathbb{R}^3$ *il sistema* $AX = b$ *è risolubile e per tali* b *calcolare tutte le soluzioni del sistema.*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane di Col(A).*

Esercizio 5. *Trovare equazioni cartesiane e parametriche dei seguenti sottospazi (affini o vetttoriali) e calcolarne la dimensione.*

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2.$

2. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

Esercizio 6. *Studiare il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + (3k-3)x_2 - x_3 + (k^2-2k-1)x_4 & = & k^2-4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + (k+5)x_4 & = & k+1 \\ (k-2)x_1 + (3k-6)x_2 - x_3 + (k^2-2k-3)x_4 & = & k^2-5 \end{cases}$$

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Civile, Ambiente e Territorio
Settimana 7
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 12 Novembre 2019

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice complessa:*

$$A = \begin{pmatrix} i & -1+i & 2i & 3i \\ -1+i & -2 & -4+4i & 0 \\ 1+i & 2i & 2+2i & 6+6i \end{pmatrix}$$

1. *Calolcare il rango-riga di A.*
2. *Trovare una base di Row(A).*
3. *Trovare una base di Im(A).*

Sol.:

1. $RrgA = rgA^t = rg\begin{pmatrix} i & -1+i & 1+i \\ -1+i & -2 & 2i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1+i & -2 & 2i \\ i & -1+i & 1+i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix}$

$$= rg\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ i & -1+i & 1+i \\ 2i & -4+4i & 2+2i \\ 3i & 0 & 6+6i \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6+2i & 0 \\ 0 & 3-3i & 3+3i \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3+3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

2. Le colonne di A^t sono lin. Ind. quindi le tre righe di A sono Lin Ind. e formano una base di Row(A)

3. $rgA = RrgA = 3$. Quindi $ImA = \mathbb{C}^3$. Una sua base è la base standard $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol. :

$$(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 3 \\ 3/2 & 3 & -5 \\ -3/2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa della seguente matrice complessa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

$$(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & 0 & 1 & 0 \\ -i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & -2i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & -1-2i & -2i & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & -1-2i & -2i & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -2i & 2i & 1 & 2-i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}i & i+\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & 0 & 1+i & \frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+i \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ 1 & 0 & -i \\ -1 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+i \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Determinare per quali* $b \in \mathbb{R}^3$ *il sistema* $AX = b$ *è risolubile e per tali* b *calcolare tutte le soluzioni del sistema.*

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ -1 & 5 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 7 & 3 & 7 & b_2+b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 \\ 0 & 7 & 3 & 7 & b_2+b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 \\ 0 & 0 & -11 & 14 & b_2+b_1-7b_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2+\frac{7}{11}b_3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{86}{11} & \frac{14}{11}b_1+\frac{3}{11}b_2-\frac{21}{11}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{11} & \frac{2}{11}b_1+\frac{2}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2+\frac{7}{11}b_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{52}{11} & \frac{10}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2-\frac{15}{11}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{11} & \frac{2}{11}b_1+\frac{2}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2+\frac{7}{11}b_3 \end{array}\right).$$

$\mathrm{rg}A=3 \Rightarrow AX=b$ è risolubile $\forall b \in \mathbb{R}^3$. Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2-\frac{15}{11}b_3 \\ \frac{2}{11}b_1+\frac{2}{11}b_2-\frac{3}{11}b_3 \\ -\frac{1}{11}b_1-\frac{1}{11}b_2+\frac{7}{11}b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -52 \\ -17 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trovare, se esiste, l'inversa di* A.
2. *Dimostrare che* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^2$.
3. *Siano* $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ *e* $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. *Calcolare* $F_{\mathcal{B}}(b_1)$ *e* $F_{\mathcal{B}}(b_2)$.

Sol.: 1. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. A è invertibile e quindi le sue colonne formano una base di $\mathbb{R}^2$.

3. $F_{\mathcal{B}}(b_1) = A^{-1} b_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 \\ 25 \end{pmatrix}$

$F_{\mathcal{B}}(b_2) = A^{-1} b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. *Studiare il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + (3k-3)x_2 - x_3 + (k^2-2k-1)x_4 = k^2-4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + (k+5)x_4 = k+1 \\ (k-2)x_1 + (3k-6)x_2 - x_3 + (k^2-2k-3)x_4 = k^2-5 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} K-1 & 3K-3 & -1 & K^2-2K-1 & K^2-4 \\ 2 & 6 & 1 & K+5 & K+1 \\ K-2 & 3K-6 & -1 & K^2-2K-3 & K^2-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & K+5 & K+1 \\ K-2 & 3K-6 & -1 & K^2-2K-3 & K^2-5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & K+1 & K-1 \\ 0 & 0 & -1 & K^2-4K+1 & K^2-K-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & K+1 & K-1 \\ 0 & 0 & 0 & K^2-3K+2 & K^2-4 \end{array}\right)$$

caso 1: $K^2-3K+2 = (K-2)(K-1) \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & K+1 & K-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{K+2}{K-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{-K-5}{K-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5K-1}{K-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{K+2}{K-1} \end{array}\right)$$

Le soluzioni sono $\begin{pmatrix} \frac{-K-5}{K-1} \\ \frac{-5K-1}{K-1} \\ \frac{K+2}{K-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

caso 2a: $K=2$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

caso 2b: $K=1$: Il sistema non è risolubile.