Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 11
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 10 Dicembre 2019

Esercizio 1. *Sia r la retta per l'origine con vettore direttore* $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

1. *Dimostrare che la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su r nella base canonica è* $P_{a,b} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.
2. *Dimostrare che* $P^2 = P$.
3. *Sia* $P \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tale che* $P^2 = P$, $P^t = P$ *e* $rg(P) = 1$. *Dimostrare che P è la matrice di proiezione ortogonale sulla retta* $Im(P)$.

Esercizio 2. *Di ognuna delle seguenti applicazioni lineari* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *trovare la matrice che la rappresenta nella base canonica (sia in partenza che in arrivo):*

1. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
2. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
3. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
4. *L è la proiezione ortogonale sulla retta che ha vettore direttore* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. *Dato $m \in \mathbb{R}$, L fissa la retta $r : y = mx$ puntualmente (ovvero $L(P) = P$ per ogni $P \in r$) e manda i punti della retta $s : y = (m+1)x$ in zero.*

Esercizio 3. *Si consideri la retta affine r di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $r : y = -2x - 1$ e sia $P = (1, 2)^t$.*

1. *(1/2 punto) Trovare equazioni parametriche di r.*
2. *(1/2 punto) Calcolare la distanza di P da r.*
3. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette r_1 ed r_2 passanti per P e che formano un angolo di $\pi/4$ con r.*
4. *(1 punto) Calcolare i punti di intersezione $Q_1 = r \cap r_1$ e $Q_2 = r \cap r_2$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici Q_1, Q_2 e P.*
6. *(1/2 punto) Trovare il punto P_1 ottenuto ruotando P di $\pi/4$ attorno a Q_1 in senso opposto a Q_2.*
7. *(1/2 punto) Trovare il punto P_2 ottenuto ruotando P di $\pi/4$ attorno a Q_2 in senso opposto a Q_1.*
8. *(1 punto) Calcolare l'area del quadrilatero di vertici P_1, P_2, Q_1 e Q_2.*

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.

2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

$$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.

3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nelle basi standard.*

4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di* T.

5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di* T.

Esercizio 5. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per* r_1 *ed una forma cartesiana per* r_2*.*
2. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2 *e calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
3. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta* r_3 *avente le seguenti proprietà: 1)* r_3 *è ortogonale sia ad* r_1 *che a* r_2*; 2)* r_3 *interseca sia* r_1 *che* r_2*.*
4. *(1 punto) Determinare i punti* $P_1 = r_1 \cap r_3$ *e* $P_2 = r_2 \cap r_3$*.*
5. *(1 punto) Sia* $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1*,* P_2 *e* P_3*. Fare un disegno illustrativo.*
6. *(1 punto) Sia* $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1*,* P_3 *e* P_4*. Fare un disegno illustrativo.*