Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 13
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 24 Dicembre 2019

Esercizio 1. *Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice 3×3*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(3 punti) Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.*
2. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante $\mathcal{B}$, una matrice B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}A_kB = D$.*
3. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, calcolare A^{2n} per ogni $n \geq 1$.*

<u>Sol</u>: $P_{A_K}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1)$

$= (x+1)^2(x-1)$

$\Rightarrow Sp(A_K) = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$. $mg_{A_K}(1) = 1 = ma_{A_K}(1)$.

Studiamo la molteplicità geometrica di -1:

$$V_{-1}(A_K) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1+K & K & -1 \\ -K+1 & -K & 1 \\ -K-1 & -K & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} K-1 & K & -1 \\ -K-1 & -K & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} K-1 & K & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ K-1 & K & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & K & -K \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim V_{-1}(A_K) = mg_{A_K}(-1) = \begin{cases} 2 & \text{se } K = 0 \\ 1 & \text{se } K \neq 0 \end{cases}$.

Concludiamo che A_K è diagonalizzabile se e solo se $K = 0$.

1. $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $V_1(A_0) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{-1}(A_0) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Una base diagonalizzante è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Poniamo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora $B^{-1} A_0 B = D$

dove $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A_0 = B D B^{-1} \Rightarrow A_0^{2n} = B D^{2n} B^{-1} = B \mathbb{1}_3 B^{-1} = \mathbb{1}_3$.

Esercizio 2. *Si consideri le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Trovare una base di KerA ed una base di ImA.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente.*
3. *(1 punto) Usando il teorema di decomposizione ortogonale, trovare due vettori $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.*
4. *(2 punti) Trovare la matrice C che rappresenta $S_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$ in partenza e nella base canonica in arrivo.*
5. *(2 punti) Si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle$. Determinare una base di $KerA \cap U$ ed una base di $KerA + U$.*

Sol. 1. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$

2. Consideriamo la matrice $Z = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Il minore $\det Z([1,2],[1,2]) = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ e quindi, per il teorema degli orlati, $\operatorname{rg} Z = 2$. Ne segue che $\{v_1, v_2\}$ è lin. Ind.

3. $\operatorname{Ker} Z^t = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Per il Teorema di dec. ort., $\operatorname{Ker} Z^t = (\operatorname{Im} Z)^\perp$.
Poniamo $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $A v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, A v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. Nel punto precedente abbiamo osservato che $\operatorname{Ker} A = \langle v_1, v_2 \rangle$.

$U = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle \Rightarrow U \cap \operatorname{Ker} A = \langle v_1 + v_2 \rangle$

$\operatorname{Ker} A + U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ed il seguente vettore $b \in \mathbb{R}^3$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare che il sistema $AX = b$ non è risolubile.*
2. *Calcolare la proiezione ortogonale di b su $Im(A)$. Denotarla b'.*
3. *Risolvere il sistema $AX = b'$. Le soluzioni di questo sistema si chiamano le soluzioni approssimate del sistema $AX = b$.*

Sol.: 1. $rg(A|b) = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = 3$

$rg\, A = 2 \neq 3 \Rightarrow AX = b$ non è risolubile.

2. La matrice di proiezione ortogonale su $Im\,A$ è

$P = A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Per cui

$b' = Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

3. Il sistema $AX = b'$ ammette l'unica soluzione

$X_0 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si considerino i due sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *Dimostrare che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$*;*
2. *Stabilire se la proiezione su* U *lungo* W *che abbiamo denotato a lezione con* $P_U^W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base ortonormale di* $\mathbb{R}^4$ *composta di suoi autovettori.*

Sol.: 1. $U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \operatorname{Im}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Im} A$

$W = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} A^t.$

Per il teorema di decomposizione ortogonale,

$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} A \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A^t = U \oplus W.$

2. Abbiamo dimostrato che $W = U^\perp$ e quindi $pr_U^W = pr_U$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

Cerchiamo una base ortogonale di U con Gram-Schmidt:

$F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cerchiamo una base di W:

$W = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$F_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 8/9 \\ -2/9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ composta di autovettori per pr_U è

$$\left\{ E_1 = \frac{F_1}{\|F_1\|},\ E_2 = \frac{F_2}{\|F_2\|},\ E_3 = \frac{F_3}{\|F_3\|},\ E_4 = \frac{F_4}{\|F_4\|} \right\}$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\|F_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2} + 5} = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|F_3\| = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|F_4\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{9} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{9} \sqrt{18 + 81} = \frac{2}{9} \sqrt{99} =$$

$$E_4 = \frac{1}{\sqrt{99}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Determinare una base e la dimensione di U.*
2. *(3 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $X = 12(1, -1, 1, -1)^t$.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 12(1, -1, 1, -1)^t$ da U.*

Sol.:

1. $U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim U = 2.$

2. $U = \operatorname{Im} A$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

$P_U = A\,(A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & -3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $P_U X = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. $\operatorname{dist}(X, U) = \| X - P_U X \| = \left\| 8 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 8\sqrt{6}$

Esercizio 6. *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 2.$$

1. *Trovare le matrici A e b tali che $p(X) = X^tAX + 2B \cdot X + 2$.*
2. *Ridurre a forma canonica metrica la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.*
3. *Ridurre a forma canonica affine la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.*

Sol.: 1. $p(X) = X^t A X + 2 b \cdot X + 2$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $P_A(x) = x^2 + 6x + 8 = (x+4)(x+2)$

$V_{-4}(A) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V_{-2}(A) = V_{-4}(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Poniamo $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Allora $B^tAB = D$ dove $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Poniamo $X = BY$ ovvero $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$ e otteniamo

$$p(X) = Y^t D Y + 2 B^t b \cdot Y + 2 =$$

$$= -4y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot Y + 2$$

$$= -4y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot Y + 2 = -4y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{4}{\sqrt{2}} y_2 + 2$$

$$= -4y_1^2 - 2\left(y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 \right) + 2 = q(Y)$$

Completiamo i quadrati:

$$q(Y) = -4y_1^2 - 2\left(y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_2\right) + 2$$

$$= -4y_1^2 - 2\left(y_2^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2$$

$$= -4y_1^2 - 2\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 + 2$$

Poniamo

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e otteniamo

$$q(Y) = -4z_1^2 - 2z_2^2 + 3 = r(z).$$

La conica $\mathcal{C}_p$ è metricamente equivalente a

$$4z_1^2 + 2z_2^2 = 3$$

ovvero

$$\frac{4}{3}z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 = 1$$

e quindi $\mathcal{C}_p$ è un' ellisse.

Effettuiamo il cambiamento affine (non metrico)

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}\,x \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,y \end{cases}$$

e otteniamo che $\mathcal{C}_p$ è affinemente equivalente a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Esercizio 7. *1. Siano A e B due matrici $n \times n$. Dimostrare che $Tr(AB) = Tr(BA)$. Dedurre che se A e C sono due matrici simili allora hanno la stessa traccia.*

2. Dimostrare che se A e C sono due matrici simili allora $det(A) = det(C)$.

3. Sia A una matrice $n \times n$ diagonalizzabile e siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Dimostrare che $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

<u>Sol.</u>: 1. $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} A_i B^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} =$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} B_j A^j = Tr(BA).$

Se $C = B^{-1}AB$, allora

$Tr(C) = Tr(B^{-1}AB) = Tr(AB^{-1}B) = Tr(A).$

2. Se $C = B^{-1}AB$ allora

$\det C = \det(B^{-1}AB) \underset{\text{Binet}}{=} \det(B)^{-1} \det A \det B = \det A.$

3. Se A è diagonalizzabile allora è simile ad una matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dove $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Allora

$Tr(A) \underset{(1)}{=} Tr(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\det(A) \underset{(2)}{=} \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$