Esame di Geometria 1
14 Gennaio 2020
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome:

Cognome:

Matricola:

Ambiente e Territorio	
Civile	
Chimica	

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice complessa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & i & i \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
3. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando la formula di Cramer.*
4. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando l'algoritmo di inversione.*

Sol.: 1) $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ 1-i & i & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1-i & i \end{pmatrix} = -(i-(i+1)) = 1$

2) $\operatorname{Tr} A = 2+i$, $(\operatorname{Tr} A)^2 = 3+4i$; $\operatorname{Tr}(A^2) = 6i+1$.

$P_A(x) = x^3 - \operatorname{Tr} A\, x^2 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}(A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right)x - \det A =$

$= x^3 - (2+i)x^2 + (1-i)x - 1$

Per il Teorema di Cayley-Hamilton $A^{-1} =$

$A^{-1} = A^2 - (2+i)A + (1-i)\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $c_{11} = -i \quad c_{21} = 0 \quad c_{31} = i$

$c_{12} = 3-2i \quad c_{22} = -1 \quad c_{32} = -3$

$c_{13} = -2+i \quad c_{23} = 1 \quad c_{33} = 2$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & i & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & i-1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 0 & 2+2i & -i & -2i \\ 0 & 1 & 0 & 3-2i & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 3-2i & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & i-2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione*

$$U : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 4(1, -1, -1, 0)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sottospazio vettoriale Z_k generato dal vettore $z_k = (1, k, -1, -k)^t$. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la proiezione $p_U^{Z_k}$ su U lungo Z_k è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali k trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ formata da autovettori per $p_U^{Z_k}$, specificando i corrispondenti autovalori.*

Sol.: 1) $U = \mathrm{Ker}\,(1,-1,-1,1)$. Una base di U è quindi

$\mathcal{B}_U = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$. Poniamo

$F_1 = v_1$; $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$; $F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\1/3\\1\end{pmatrix}$

$\|F_1\| = \sqrt{2}$; $\|F_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\|F_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Una base ortonormale di U è

$\mathcal{E}_U = \left\{ E_1 = \frac{1}{\|F_1\|} F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} ; E_2 = \frac{1}{\|F_2\|} F_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} ; E_3 = \frac{1}{\|F_3\|} F_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$

2) $B := (E_1 | E_2 | E_3) \Rightarrow P = BB^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $pr_U(X) = PX = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{dist}(X, U) = \|X - PX\| = 6$

4) $z_k \in U^\perp \Leftrightarrow k = -1$. Per cui $p_U^{z_k}$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $k = -1$. In questo caso, una base ortonormale di autovettori è $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ dove $E_4 = \frac{1}{\|v_{-1}\|} v_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. $U = V_1(p_U^{Z_{-1}})$, $Z_{-1} = V_0(p_U^{Z_{-1}})$.

Esercizio 3. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (1,2)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando Q di $30°$ in senso anti-orario attorno al punto $P = (2,2)^t$.*

2. *(1 punto) Sia $P = (2,3)^t$. Trovare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente P attraverso la retta $r : 2x + 3y = 1$.*

3. *(1 punto) Trovare la posizione reciproca delle rette $r : 2x + 3y = -1$ e $s : 3x + 2y = 2$.*

4. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $P = (1,1)^t$ e parallela alla retta $r : 2x + 3y = -2$.*

5. *(1 punto) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$ e trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \frac{1}{4}(9, 3\sqrt{3} - 8)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (3,2)^t$ e la retta $r : 2x - y = 1$.*

7. *(1 punto) Sia $r : 2x + y = 1$ e $P = (2,2)^t$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle due rette r_1 ed r_2 passanti per P e che formano un angolo di $\pi/4$ con r. Posto $P_1 = r \cap r_1$ e $P_2 = r \cap r_2$ calcolare l'area ed il perimetro del triangolodi vertici P, P_1 e P_2.*

1) $R = P + R_{\frac{\pi}{6}}(Q-P) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$

2) $X_0 := \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $r_0 : y = -\frac{2}{3}x$, $R = X_0 + Q_{-\frac{2}{3}}(P - X_0) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \frac{9}{13}\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-22\\-33\end{pmatrix}$

3) $\det\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r \cap s = \{P_0\}$. $P_0 = \begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$.

4) $2x+3y = k$, $2+3 = 5 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow$ La retta cercata è $2x+3y=5 : \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left\langle\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\rangle$.

5) $\mathcal{C} : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4}$ $C = \begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix}$; $r = \frac{3}{2}$. $\mathcal{C} : \begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$P - C = \begin{pmatrix}3/4\\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \Rightarrow P = C + r\begin{pmatrix}\cos\pi/3\\ \sin\pi/3\end{pmatrix}$. La retta Tangente a $\mathcal{C}$ in P è $t_P = P + \left\langle\begin{pmatrix}-\sin\pi/3\\ \cos\pi/3\end{pmatrix}\right\rangle : x + \sqrt{3}y = \frac{9}{2} - 2\sqrt{3}$.

6) $\mathrm{dist}(P, r) = \frac{|2\cdot 3 - 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

7. $1 = \left|\frac{-2+m}{1+2m}\right| \iff -2+m = \pm(1+2m) \iff m=3 \text{ o } m=\frac{1}{3}$

Le rette cercate sono

$r_1 : -3x+y = -4$ e $r_2 : x+3y = 8.$

$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$P_1 = r \cap r_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = r \cap r_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\text{Area}\,(P\widehat{P_1}P_2) = \frac{1}{2}\left|\det(P-P_1, P_2-P_1)\right| = 5$

$\text{Perimetro}\,(P\widehat{P_1}P_2) = \|P-P_1\| + \|P-P_2\| + \|P_2-P_1\| = 2\sqrt{5}\,(1+\sqrt{2}).$

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette*

$$r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano:*

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (1,2,1)^t$ e $P_3 = (2,2,1)^t$.*

4. *(1 punto) Consideriamo le due rette $r = (3,-1,2)^t + \langle (1,1,0)^t \rangle$ e $s = (0,5,2)^t + \langle (1,-2,1)^t \rangle$. Dimostrare che r ed s sono sghembe e trovare il piano π contenente r e parallelo a s.*

5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (1,-1,2)^t$ e $P_3 = (-2,1,1)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette $r = (1,1,1)^t + \langle (1,2,-1)^t \rangle$ ed $s = (1,2,3)^t + \langle (2,-1,1)^t \rangle$*

7. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (1,2,3)^t$ ed il piano $\pi : 2x + 3y - z = 2$.*

Sol.: 1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ r ed s non sono parallele.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. $t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 1.$

$r \cap s = \{P_0\}$ dove $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -4 & 2 \\ 0 & 11 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -5/11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/22 \\ 0 & 1 & -5/11 \end{array}\right) \Rightarrow r \cap \pi = \{P_0\}$ dove

$P_0 = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

3. $\pi = P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle : z = 1$

4. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow$ r ed s sono sghembe.

r ha eq. cartesiana $r: \begin{cases} x - y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$. Fascio di piani per r:

$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x - y - 4) + \beta(z - 2) = 0$ ovvero $\alpha x - \alpha y + \beta z = 4\alpha + 2\beta$.

s è parallelo a $\pi_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow (\alpha, -\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$

Il piano cercato è

$$\pi_{1,-3} : x - y - 3z = -2.$$

5. $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Area $= \frac{1}{2} \|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = -13 \Rightarrow$.

$$\operatorname{dist}(r, s) = \frac{13}{\sqrt{35}}$$

7. Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$. Allora

$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \left\| pr_{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} (P - Q) \right\| = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali $x_1, \cdots, x_6$, dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 - (k-1)x_4 - (k-1)x_6 = k-3 \\ 3x_1 + 3(k-1)x_2 + x_3 - (k-1)x_4 - (k+1)x_6 = k^2+k-7 \\ x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 + (k-2)(k-1)x_5 + (4k-6)x_6 = k^2-3 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di k per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Sol.

$$\hat{A}_K := \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & K-1 & 0 & -K+1 & 0 & -K+1 & K-3 \\ 3 & 3K-3 & 1 & -K+1 & 0 & -K-1 & K^2+K-7 \\ 1 & K-1 & 1 & K-1 & (K-2)(K-1) & 4K-6 & K^2-3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & K-1 & 0 & -K+1 & 0 & -K+1 & K-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2K-2 & 0 & 2K-4 & K^2-2K+2 \\ 0 & 0 & 1 & 2K-2 & (K-2)(K-1) & 5K-7 & K^2-K \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & K-1 & 0 & -K+1 & 0 & -K+1 & K-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2K-2 & 0 & 2K-4 & K^2-2K+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (K-2)(K-1) & 3K-3 & K-2 \end{array}\right).$$

Se $\boxed{K=1}$ l'ultima riga è $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid -1)$ e quindi il sistema non è risolubile.

Se $\boxed{K=2}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{(k-1)(k-2) \neq 0}$:

$$\operatorname{rref}(\hat{A}_k) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & k-1 & 0 & -k+1 & 0 & -k+1 & k-3 \\ 0 & 0 & 1 & 2k-2 & 0 & 2k-4 & k^2-2k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{k-2} & \frac{1}{k-1} \end{array}\right)$$

il sistema è risolubile e le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} k-3 \\ 0 \\ k^2-2k+2 \\ 0 \\ 1/k-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 2-2k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ 4-2k \\ 0 \\ 3/2-k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$