Esame di Geometria 1
Ingegneria Civile
14 Febbraio 2020
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome:

Cognome:

Matricola:

---

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione*

$$U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 4(2, -1, 1, -1)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Dimostrare che la proiezione ortogonale su U è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$ composta di suoi autovettori.*

Sol.: 1) $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U. Applichiamo l'algoritmo di ~~orto~~ortonormalizzazione:

$F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|F_1\| = \sqrt{2}$, $E_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\|F_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $\|F_3\| = \frac{\sqrt{12}}{3}$; $E_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ -3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \end{pmatrix}$.

$\{E_1, E_2, E_3\}$ è una base ortonormale di U.

2) Poniamo $B = (E_1 | E_2 | E_3) = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Allora

$P = BB^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $PX = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. $\text{dist}(X, U) = \|X - PX\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$

4) Poiché $U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ dove $E_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ composta di autovettori per P_U.

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti basi (di $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$, rispettivamente):*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

e consideriamo le applicazioni lineari $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ e $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tali che

$$f(v_1) = w_1 + \tfrac{1}{2}w_2, \quad f(v_2) = \tfrac{1}{2}w_2 + w_3;$$

$$g(w_1) = 2v_1 + v_2, \quad g(w_2) = -v_1 + v_2, \quad g(w_3) = -v_1 - 2v_2.$$

1. *(1 punto) Stabilire se f è iniettiva.*
2. *(1 punto) Stabilire se g è suriettiva.*
3. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di $g \circ f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.*
4. *(3 punti) Trovare la matrice C che rappresenta $g \circ f$ nella base standard.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di $g \circ f$.*

Sol.: 1) La matrice che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{C}^2}\} \Rightarrow f \text{ è iniettiva.}$$

2) La matrice che rappresenta g nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{Im} g \cong \operatorname{Im} A_2 = \mathbb{C}^2 \Rightarrow g \text{ è suriettiva.}$$

3) $$\left.\begin{aligned} g\circ f(v_1) &= g\left(w_1 + \tfrac{1}{2}w_2\right) = 2v_1 + v_2 + \tfrac{1}{2}(-v_1 + v_2) = \tfrac{3}{2}(v_1+v_2) \\ g\circ f(v_2) &= g\left(\tfrac{1}{2}w_2 + w_3\right) = -\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 - v_1 - 2v_2 = -\tfrac{3}{2}(v_1+v_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} g\circ f.$$

Poiché $g\circ f \neq 0$, $\operatorname{Ker} g\circ f = \langle v_1 - v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[d, equal, "F_e"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[l, equal] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{B_1}"] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{B_2}"] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{B_1}"] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, equal, "F_e"] \\
\mathbb{C}^2 & \mathbb{C}^2 \arrow[l, "B_1"] \arrow[r, "A_1"'] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "A_2"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}$$

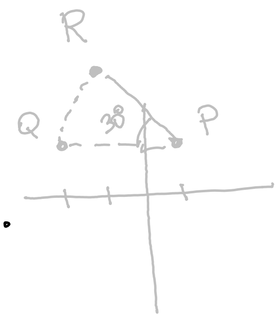
dove $B_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$C = B_1 A_2 A_1 B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3i & 0 \end{pmatrix}$$

5) $\operatorname{Im} g\circ f = \operatorname{Im} C = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 3. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (-2, 1)^t$ e $P = (1, 1)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando Q attorno a P di $30°$ in senso* orario.
2. *(1 punto) Sia $P = (7, -2)^t$. Trovare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente P attraverso la retta $r : x - 2y = -4$.*
3. *(2 punti) Sia $r : -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 5 = 0$. Trovare l'equazione cartesiana delle rette passanti per $P = (\sqrt{3}, 2)^t$ e che formano un angolo di $30°$ con la retta r.*
4. *(2 punti) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta tangente t_P a $\mathcal{C}$ nel punto $P = C + r(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))^t$ (dove C è il centro ed r il raggio di $\mathcal{C}$).*
5. *(1 punto) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici $P_1 = (-1, 1)^t$, $P_2 = (1, 2)^t$, $P_3 = (3, -1)^t$.*



Sol: 1) $R = P + R_{-30°}(Q-P) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-3\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$.

2) r ha pendenza $\frac{1}{2}$ e passa per $X_0 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Quindi

$R = X_0 + Q_{\frac{1}{2}}(P - X_0) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{4} & 1\\ 1 & \frac{1}{4}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$.

3) r ha vettore direttore $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix} = P_{30°}$. Quindi le rette richieste hanno vettori direttori $P_{60°} = \begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ e $P_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Imponiamo il passaggio per P e otteniamo

$r_1 : y = 2$; $r_2 : \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$.

4) $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. $C = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $r = 1$. $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi)\right\}$.

$P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$. $t_P = P + \left\langle \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix} \right\rangle : \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) Area $= \frac{1}{2}\left|\det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix}\right| = 4$

Perimetro $= \|P_2 - P_1\| + \|P_3 - P_1\| + \|P_3 - P_2\| = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{13} = 3\sqrt{5} + \sqrt{13}$.

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette (se si intersecano trovare il punto di intersezione)*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

senza cambiare la loro forma .

2. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano (se si intersecano trovare il punto di intersezione):*

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \quad \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punti) Stabilire la posizione reciproca delle due rette:*

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

senza cambiare la loro forma.

4. *(1 punto) Trovare un'equazione cartesiana del piano π_1 contenente la retta r_1 (definita nel punto 3) e passante per il punto $(1, 0, -1)^t$.*

5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il piano π_1 (trovato al punto 4) e la retta r_2 (definita nel punto 3).*

6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

Sol.: 1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $X_0 + sv = Y_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \iff X_0 - Y_0 = t_1 v_1 + t_2 v_2 - sv \iff (v_1 | v_2 | -v) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ s \end{pmatrix} = X_0 - Y_0$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 10 & -5 & -20 \\ 0 & -14 & 8 & 33 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -14 & 8 & 33 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. $r \cap \pi = X_0 + sv = Y_0 + \frac{5}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$

$r \cap \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $r_1 : \begin{cases} x-2y=3 \\ y-z=-3 \end{cases}$ $\quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$r_1 : AX=b$, $r_2 = X_0 + \langle v \rangle$. $\exists t : A(X_0 + tv) = b \iff rg(Av \mid b - AX_0) \leq 1$.

$Av = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b - AX_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. $rg(Av \mid b-AX_0) = rg \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow r_1$ ed r_2 sono sghembe.

4) Consideriamo il fascio di piani per r_1:

$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x-2y-3) + \beta(y-z+3) = 0 \iff \pi_{\alpha,\beta} : \alpha x + (\beta - 2\alpha)y - \beta z = 3(\alpha - \beta)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \pi_{\alpha,\beta} \iff \alpha + \beta = 3(\alpha - \beta) \iff \alpha = 2\beta$. Quindi

$\pi_1 = \pi_{2,1} : 2x - 3y - z = 3$

5) Notiamo che r_2 è parallela a π_1 : $2-3+1=0$. Quindi

$dist(\pi_1, r_2) = dist\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \pi_1 \right) = \frac{|2-6+1-3|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$

6) $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\text{Area} = \frac{1}{2} \| (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & x & 2 & -2 \\ 1 & 2 & x+2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & x & 0 & -2 \\ 1 & 2 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & x-1 & x-4 \end{pmatrix} =$

$= \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & x & 0 & -2 \\ 1 & 2 & x-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2(x^2-x-2) = (x-1)^2(x+1)(x-2)$

2) $Sp(A) = \{1, -1, 2\}$. $ma_A(1) = 2$, $ma_A(-1) = ma_A(2) = 1$.

3) $mg_A(-1) = ma_A(-1) = 1$; $mg_A(2) = ma_A(2) = 1$.

$V_1(A) = Ker(\mathbb{1} - A) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow mg_A(1) = 2.$

4) $V_{-1}(A) = Ker(-\mathbb{1} - A) = Ker\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$

$= Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2(A) = Ker(2\mathbb{1} - A) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$