Esame di Geometria 1
Ingegneria Civile
14 Febbraio 2020
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome:

Cognome:

Matricola:

---

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione*

$$U : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 4(2, -1, 1, -1)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Dimostrare che la proiezione ortogonale su U è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$ composta di suoi autovettori.*

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti basi (di $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$, rispettivamente):*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

e consideriamo le applicazioni lineari $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ e $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tali che

$$f(v_1) = w_1 + \tfrac{1}{2} w_2, \quad f(v_2) = \tfrac{1}{2} w_2 + w_3;$$

$$g(w_1) = 2v_1 + v_2, \quad g(w_2) = -v_1 + v_2, \quad g(w_3) = -v_1 - 2v_2.$$

1. *(1 punto) Stabilire se f è iniettiva.*
2. *(1 punto) Stabilire se g è suriettiva.*
3. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di $g \circ f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.*
4. *(3 punti) Trovare la matrice C che rappresenta $g \circ f$ nella base standard.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di $g \circ f$.*

Esercizio 3. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (-2, 1)^t$ e $P = (1, 1)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando Q attorno a P di $30°$ in senso* orario.

2. *(1 punto) Sia $P = (7, -2)^t$. Trovare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente P attraverso la retta $r : x - 2y = -4$.*

3. *(2 punti) Sia $r : -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 5 = 0$. Trovare l'equazione cartesiana delle rette passanti per $P = (\sqrt{3}, 2)^t$ e che formano un angolo di $30°$ con la retta r.*

4. *(2 punti) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ e trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta tangente t_P a $\mathcal{C}$ nel punto $P = C + r(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))^t$ (dove C è il centro ed r il raggio di $\mathcal{C}$).*

5. *(1 punto) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici $P_1 = (-1, 1)^t$, $P_2 = (1, 2)^t$, $P_3 = (3, -1)^t$.*

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette (se si intersecano trovare il punto di intersezione)*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

senza cambiare la loro forma .

2. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano (se si intersecano trovare il punto di intersezione):*

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle, \;\; \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punti) Stabilire la posizione reciproca delle due rette:*

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

senza cambiare la loro forma.

4. *(1 punto) Trovare un'equazione cartesiana del piano π_1 contenente la retta r_1 (definita nel punto 3) e passante per il punto $(1, 0, -1)^t$.*

5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il piano π_1 (trovato al punto 4) e la retta r_2 (definita nel punto 3).*

6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*