Esercizio 1. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.*

1. *(1 punto) Trovare il centro C ed il raggio $r > 0$ di $\mathcal{C}$.*

Per $\theta \in [0, 2\pi)$, denotiamo con $Q_\theta = C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

2. *(1 punto) Sia θ l'angolo* acuto *tale che $\sin\theta = \frac{4}{5}$. Trovare le coordinate dei punti $A = Q_\theta$ e $B = Q_{-\theta}$.*

Dati due punti distinti X e Y denotiamo con $\overline{XY}$ il segmento tra X e Y e con XY la retta passante per X e Y. Sia T il triangolo di vertici A, B e C.

3. *(1 punto) Sia M il punto medio di $\overline{AB}$. Calcolare le coordinate di M.*

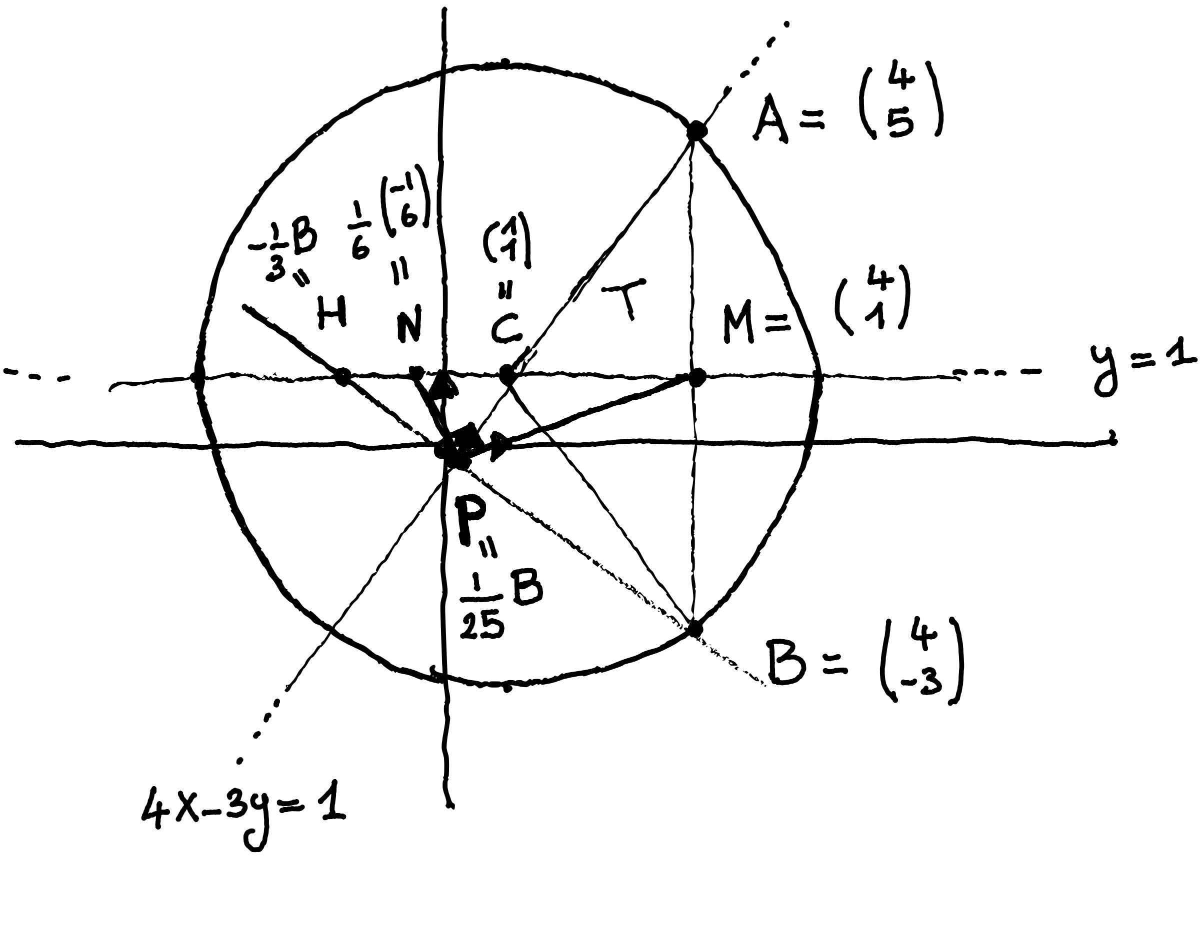
4. *(1 punto) Sia P il piede dell'altezza di T relativa a B. Calcolare le coordinate di P.*

5. *(1 punto) Sia $H = PB \cap CM$. Calcolare le coordinate di H.*

6. *(1 punto) Sia N il punto medio di $\overline{HC}$. Calcolare le coordinate di N.*

7. *(1 punto) Dimostrare che i segmenti $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$ sono ortogonali.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*



1. $\mathcal{C}: (x-1)^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, r=5.$

2. θ acuto t.c. $\sin\theta = 4/5$. Allora

$$\begin{cases}\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-16/25 = 9/25\\ \cos\theta \geq 0\end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.$$

3. $M = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

4. P è tale che $(P-B)\cdot(A-C)=0$ e $P\in AC$.
Quindi P è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases}3x+4y=0\\4x-3y=1\end{cases} \Rightarrow P=\frac{1}{25}B=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

5. $PB = \langle\vec{OB}\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\rangle$, $CM: y=1 \Rightarrow H=-\frac{1}{3}B=\begin{pmatrix}-4/3\\1\end{pmatrix}$

6. $N=\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}C=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

7. $P-N=\frac{1}{25}B-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{150}\begin{pmatrix}49\\-168\end{pmatrix}=\frac{7}{150}\begin{pmatrix}7\\-24\end{pmatrix}$

$$P-M=\frac{1}{25}B-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=-\frac{4}{25}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (P-N)\cdot(P-M)=0.$$

Esercizio 2. *Siano $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{R})$ quattro matrici riga non-nulle e siano $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. Consideriamo i quattro piani*

$$\pi_1 : A_1X = b_1, \quad \pi_2 : A_2X = b_2, \quad \pi_3 : A_3X = b_3, \quad \pi_4 : A_4X = b_4.$$

Supponiamo che $rg \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \\ \hline A_3 & b_3 \\ \hline A_4 & b_4 \end{array}\right) = 4.$

1. *(2 punti) Quale può essere l'intersezione di π_1, π_2, π_3 e π_4?*
2. *(2 punti) Quale può essere l'intersezione di π_1, π_2 e π_3?*

Siano ora

$$\begin{array}{ll} A_1 = (0 \quad -1 \quad 1), & b_1 = 2; \\ A_2 = (-1 \quad -7 \quad 3), & b_2 = 10; \\ A_3 = (1 \quad 5 \quad -2), & b_3 = -8; \\ A_4 = (-1 \quad -5 \quad 3), & b_4 = 8. \end{array}$$

Siano $P_1 = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $P_2 = \pi_3 \cap \pi_4 \cap \pi_1$, $P_3 = \pi_4 \cap \pi_1 \cap \pi_2$.

3. *(3 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3.*

Poniamo $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \\ \hline A_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 3}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

1) Poiché $rg(A|b) = 4$, ed A è 4×3, otteniamo che $rg\, A = 3$ perché sottoinsiemi di insiemi lin. Ind. sono lin. Ind.

Quindi $rg\, A \neq rg(A|b)$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema $AX = b$ non ha soluzione. Questo vuol dire che i 4 piani non si intersecano.

2) Poiché $rg\,A = 3$, $2 \leq rg\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{pmatrix} \leq 3$.

Poiché $rg\,(A|b) = 4$, se togliamo l'ultima riga otteniamo una matrice di rango 3

Quindi $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ o è l'insieme vuoto oppure un punto. Vediamo con un esempio che entrambi i casi si possono verificare: poniamo

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Allora $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = \phi$.

3) $P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \| (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

$$P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & x-3 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & x-1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & x+3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 2 \\ 2 & x+1 & 3 & x+3 \end{pmatrix}$$

$$= (x+1)\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1-x \\ 0 & x-1 & 2 \end{pmatrix} = (x+1)\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1-x \\ -2(x-1) & 0 & 2+(x-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+1)\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -2(x-1) & 2+(x-1)^2 \end{pmatrix} = (x+1)(x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2+(x-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+1)(x-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & (x-1)^2 \end{pmatrix} = (x+1)(x-1)^3$$

Quindi $Sp(A) = \{1, -1\}$. $ma_A(1) = 3$, $ma_A(-1) = 1 = mg_A(-1)$

$\Rightarrow Tr A = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$, $\det A = 1^3(-1) = -1$.

$$mg_A(1) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \dim \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 < ma_A(1)$$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ *e sia* $f : V \to V$ *la funzione definita da:*

$$f(p(x)) = p(x) - p(-x).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice associata ad* f *nella base standard di* V*.*
3. *(2 punti) Calcolare* $\dim \operatorname{Ker} f$ *e* $\operatorname{rg} f$*.*
4. *(2 punti) Dimostrare che* $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$*.*

1. $f(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(x) - (\alpha p+\beta q)(-x)$
$= \alpha\, p(x)+\beta q(x) - \alpha\, p(-x) - \beta q(-x) = \alpha f(p) + \beta f(q).$

2. $f(1)=0$, $f(x)=2x$, $f(x^2)=0$, $f(x^3)=2x^3$, $f(x^4)=0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Poiché $\langle 1, x^2, x^4\rangle \subseteq \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f \geq 3$
Poiché $\langle x, x^3\rangle \subseteq \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \geq 2$.
Per il Teorema della dimensione,
$\operatorname{rg} f = 5 - \dim \operatorname{Ker} f \leq 5 - 3 = 2$. Quindi,
$\operatorname{rg} f = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 3$.

4. Dal punto 3 sappiamo che $\operatorname{Ker} f = \langle 1, x^2, x^4\rangle$
e $\operatorname{Im} f = \langle x, x^3\rangle$. Quindi, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_V\}$
e $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$, perché $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è
una base di V.

Esercizio 5. *Sia* $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ *dove*

$$v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_4 = v_1 + 2v_2 + v_3 \in \mathbb{R}^4.$$

1. *(3 punti) Determinare una base ortonormale di* W.
2. *(2 punti) Determinare la matrice di proiezione ortogonale* P_W *su* W.
3. *(2 punti) Calcolare la distanza del punto* $p = \begin{pmatrix}-3\\5\\-7\\0\end{pmatrix}$ *da* W.

1) $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \underset{\text{lemma di scambio}}{=} \langle e_1, v_2, v_3 \rangle$.

$F_1 := e_1$, $F_1 \cdot F_1 = 1$; $F_2 := v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = v_2$, $F_2 \cdot F_2 = 5$;

$F_3 := v_3 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $F_3 \cdot F_3 = 9$.

$\left\{ E_1 = e_1,\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_2,\ E_3 = \frac{1}{3} F_3 \right\}$ è una base ortonormale di W.

2) $Q = (E_1 | E_2 | E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$

$P_W = Q Q^t = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 10 & -8 \\ 0 & 10 & 20 & 20 \\ 0 & -8 & 20 & 29 \end{pmatrix}$

3) $P_W p = \begin{pmatrix}-3\\3\\-2\\-4\end{pmatrix}$. $\operatorname{dist}(p, W) = \| p - P_W p \| = \left\| \begin{pmatrix}0\\2\\-5\\4\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$