Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti P_1 e P_2 e la seguente retta r:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r : 3x + 2y = 6.$$

1. *(3 punti) Trovare, se esiste, un punto Q sulla retta r tale che il triangolo P_1P_2Q abbia area uguale ad uno.*
2. *(1 punto) Trovare il punto R di intersezione tra la retta r e la retta passante per P_1 e P_2.*
3. *(3 punti) Trovare tutti i punti S tali che P_1P_2S sia un triangolo equilatero.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

1. $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$. Denotiamo $Q_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dobbiamo trovare Q_t tale che $\left|\frac{1}{2}\det(P_2-P_1 \mid Q_t - P_1)\right| = 1$. $\det(P_2-P_1 \mid Q_t-P_1) = t-2$, dunque $t=2\pm2$, dunque entrambi $P_0=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_4=\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ soddisfano.

2. Cerchiamo t tale che $\text{Area}(P_1P_2Q_t)=0$, cioè $t=2$, da cui $R=Q_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

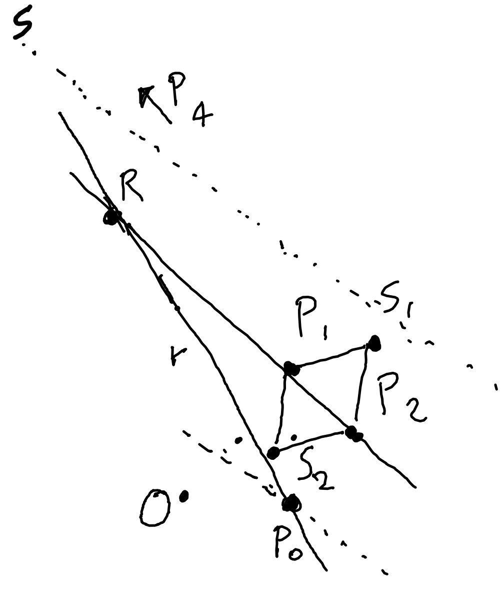
3. Ci sono esattamente 2 punti S che formano un triangolo equilatero con $P_1 P_2$ e si trovano ruotando P_2 attorno a P_1 di un angolo $\frac{\pi}{3}$, in entrambi i sensi di rotazione.

Perciò $S_1 = P_1 + R_{\frac{\pi}{3}}(P_2-P_1)$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e $S_2 = P_1 + R_{-\frac{\pi}{3}}(P_2-P_1)$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5-\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$



Esercizio 2. *Consideriamo* $\mathbb{R}^3$ *dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(3 punti) Siano* r, π *i seguenti sottospazi affini:*

$$r : \begin{cases} 2x - 3z = -2 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Stabilire la posizione reciproca di r *e* π *senza cambiare la loro forma.*

2. *(2 punti) Dimostrare che le seguenti rette sono sghembe:*

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle; \; s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Trovare, dunque, il piano π *contenente* r *e parallelo a* s.

3. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; e \; P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Notiamo che $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(v_1 | v_2) = 2$, dunque r è una retta e π è un piano.
Per studiare la posizione reciproca, analizziamo il rango delle matrici:
$M = (Av_1 | Av_2)$ e $N = (Av_1 | Av_2 | b - AX_0)$.
Poiché $\det M = \det\begin{pmatrix} -12 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 29 \neq 0$, $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} N = 2$
e r, π si intersecano in un unico punto P.

2. Detti $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, basta verificare che $\operatorname{rg}(v_1 | v_2 | X_1 - X_2) = 3$. In effetti $\det\begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -140 \neq 0$.

$\pi = X_1 + \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. $\pi : 3x - 5y + z = -16$.

3. $\text{Area}(P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{2} \| (P_1 - P_3) \wedge (P_2 - P_3) \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2} \sqrt{5}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7+6i & -16+16i & -3+3i \\ 0 & -i & 0 \\ 14-14i & 32-32i & 6-7i \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. $P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x+7-6i & 16-16i & 3-3i \\ 0 & x+i & 0 \\ -14+14i & -32+32i & x-6+7i \end{pmatrix} = (x+i)\det\begin{pmatrix} x+7-6i & 3-3i \\ -14+14i & x-6+7i \end{pmatrix}$

$= (x+i)(x^2+(1+i)x+i) = (x+i)^2(x+1) = x^3+(1+2i)x^2+(-1+2i)x-1$

1. $tr\, A = -1-2i$, $\det A = 1$.

3. $Sp(A) = \{-1, -i\}$. $ma_A(-1) = 1$, $ma_A(-i) = 2$.

4. $V_{-1} = \ker(-1\mathbb{1} - A) = \ker\begin{pmatrix} -6+6i & -16+16i & -3+3i \\ 0 & 1-i & 0 \\ 14-14i & 32-32i & 7-7i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -6 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 32 & 7 \end{pmatrix}$

$= \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{-i} = \ker(-i\mathbb{1} - A) = \ker\begin{pmatrix} -7+7i & -16+16i & -3+3i \\ 0 & 0 & 0 \\ 14-14i & 32-32i & 6-6i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 7 & 16 & 3 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dunque $mg_A(-1) = 1$, $mg_A(-i) = 2$.

5. Dal punto 4., A è diagonalizzabile e

$D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -i & \\ & & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica funzione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \quad f(v_2) = v_2 - v_3, \quad f(v_3) = v_3 - v_2.$$

   Trovare la matrice associata ad f *nella base* $\mathcal{B}$. *Chiamarla* A.

3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad* f *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$. *Chiamarla* C.
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di* f.
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di* f.

Sia $B = (v_1 | v_2 | v_3)$.

1. $\det B = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$,
dunque v_1, v_2, v_3 sono indipendenti e formano una base.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $C = BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4 e 5. Lavoriamo in base $\mathcal{B}$. $\operatorname{rref} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; quindi,

$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Cambiando nella base canonica,

$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente polinomio*

$$p(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 4$$

e denotiamo con $\mathcal{C}$ la conica di equazione $p(X) = 0$.

1. *(4 punti) Determinare la forma metrica canonica di $\mathcal{C}$, indicando il cambio di base effettuato.*
2. *(3 punti) Determinare la forma affine canonica di $\mathcal{C}$, indicando il cambio di base effettuato.*

Siano $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} -1 & -2 \end{smallmatrix} & -4 \end{pmatrix}$, così $p(X) = X^t \hat{A} X$.

1. Rotazione. Cerchiamo autovettori unitari per A: $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Scegliamo $\hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}$ come matrice di rotazione, da cui

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1^t \hat{A} \hat{B}_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -\frac{7}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{13}} \\ -\frac{7}{\sqrt{13}} & -\frac{4}{\sqrt{13}} & -4 \end{pmatrix}.$$

Traslazione. La conica non ha centro (è parabola), ma possiamo annullare il termine in x_1 e il termine noto mediante

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{13\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & -\left(\left(\frac{7}{13}\right)^2 + 4\right)\frac{\sqrt{13}}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ da cui } \hat{A}_2 = \hat{B}_2^t \hat{A}_1 \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{13}} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

dunque la forma metrica canonica è $13y_1^2 - \frac{8}{\sqrt{13}}y_2 = 0$.

2. Dilatazioni. Scegliamo $\hat{B}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} & & \\ & \frac{\sqrt{13}}{8} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, da cui

$$\hat{A}_3 = \hat{B}_3^t \hat{A}_2 \hat{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

cioè, la forma affine canonica è $z_1^2 - z_2 = 0$.