

Esercizio 1. In \mathbb{R}^2 dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti P_1 e P_2 e la seguente retta r :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r : 3x + 2y = 6.$$

1. (3 punti) Trovare, se esiste, un punto Q sulla retta r tale che il triangolo P_1P_2Q abbia area uguale ad uno.
2. (1 punto) Trovare il punto R di intersezione tra la retta r e la retta passante per P_1 e P_2 .
3. (3 punti) Trovare tutti i punti S tali che P_1P_2S sia un triangolo equilatero.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. Consideriamo \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare standard.

1. (3 punti) Siano r, π i seguenti sottospazi affini:

$$r : \begin{cases} 2x - 3z = -2 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases} \quad \pi : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Stabilire la posizione reciproca di r e π senza cambiare la loro forma.

2. (2 punti) Dimostrare che le seguenti rette sono sghembe:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Trovare, dunque, il piano π contenente r e parallelo a s .

3. (2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 + 6i & -16 + 16i & -3 + 3i \\ 0 & -i & 0 \\ 14 - 14i & 32 - 32i & 6 - 7i \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare la traccia ed il determinante di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (1 punto) *Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A .*
4. (2 punti) *Calcolare le molteplicità geometriche di ogni autovalore di A .*
5. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .

2. (1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica funzione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \quad f(v_2) = v_2 - v_3, \quad f(v_3) = v_3 - v_2.$$

Trovare la matrice associata ad f nella base \mathcal{B} . Chiamarla A .

3. (3 punti) Trovare la matrice associata ad f nella base standard di \mathbb{R}^3 . Chiamarla C .

4. (1 punto) Trovare una base per il nucleo di f .

5. (1 punto) Trovare una base per l'immagine di f .

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente polinomio*

$$p(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 4$$

e denotiamo con \mathcal{C} la conica di equazione $p(X) = 0$.

- 1. (4 punti) Determinare la forma metrica canonica di \mathcal{C} , indicando il cambio di base effettuato.*
- 2. (3 punti) Determinare la forma affine canonica di \mathcal{C} , indicando il cambio di base effettuato.*