Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i tre punti:*

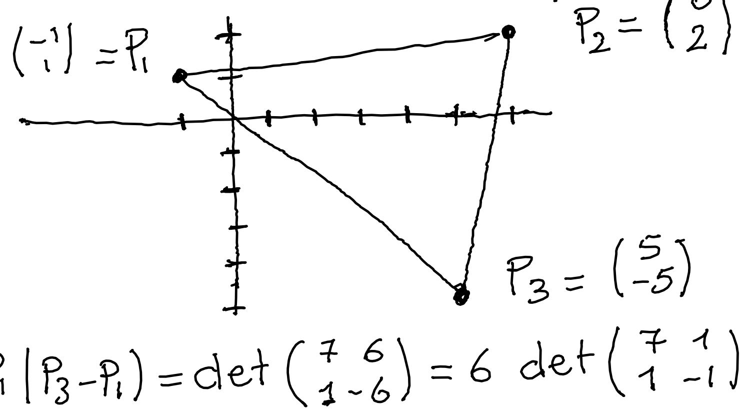
$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare le coordinate del punto* P_3 *ottenuto riflettendo ortogonalmente* P_1 *attraverso la retta passante per* P_2 *e* Q.
2. *(1 punto) Dimostrare che i punti* P_1, P_2, P_3 *non sono allineati.*
3. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane delle tre bisettrici del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Mostrare che le tre bisettrici concorrono e calcolare l'incentro* I *di* T*, ovvero la loro comune intersezione.*
5. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta in* T *ovvero la circonferenza interna tangente ai tre lati del triangolo.*

Sol.: 1) La retta per P_2 e Q ha equazione cartesiana $y = x-4$. ed ha quindi pendenza 1. Ricordiamo la matrice di riflessione.

$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$. Quindi $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha

$$P_3 = Q + Q_1(P_1 - Q) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$



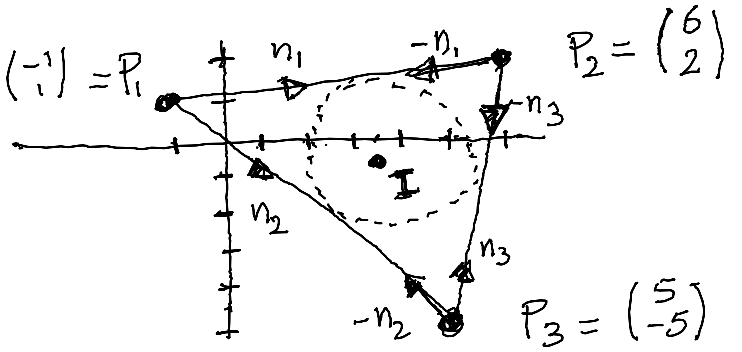
2) $\det(P_2 - P_1 | P_3 - P_1) = \det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 6 \det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-8) = -48 \neq 0$.

3) $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_1 := \frac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow m_2 := \frac{P_3 - P_1}{\|P_3 - P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow m_3 := \frac{P_2 - P_3}{\|P_2 - P_3\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3)



$$P_2 - P_1 = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} \Rightarrow n_1 := \frac{P_2-P_1}{\|P_2-P_1\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}.$$

$$P_3 - P_1 = \begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow n_2 := \frac{P_3-P_1}{\|P_3-P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$P_2 - P_3 = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} \Rightarrow n_3 := \frac{P_2-P_3}{\|P_2-P_3\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}.$$

Bisettrice in $P_1 = P_1 + \langle n_1+n_2\rangle = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\rangle : x+3y = 2$

Bisettrice in $P_2 = P_2 + \langle -n_1-n_3\rangle = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle : x-y = 4$

Bisettrice in $P_3 = P_3 + \langle -n_2+n_3\rangle = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\rangle : 3x+y = 10$

4) $\begin{cases} x+3y=2\\ x-y=4\\ 3x+y=10\end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\1&-1&4\\3&1&10\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\0&-4&2\\0&-8&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&7/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow I = \begin{pmatrix}7/2\\-1/2\end{pmatrix}$

5) $\text{dist}(I, \text{retta per } P_1 \text{ e } P_2) = \left\| (I-P_1) - \frac{(I-P_1)\cdot(P_2-P_1)}{(P_2-P_1)\cdot(P_2-P_1)}(P_2-P_1)\right\| = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\mathcal{C} : \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}7/2\\-1/2\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} \;\middle|\; \theta\in[0,2\pi) \right\}$$

Esercizio 2. *Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \quad e \quad r_2(k) : \begin{pmatrix} k \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per ogni valore di k si risponda alle seguenti domande.

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed $r_2(k)$.*
2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per $r_2(k)$.*

Sia π il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contenga $r_2(k)$ per ogni k.

3. *(2 punti) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per π.*
4. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca fra π e r_1.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza fra π e r_1. Calcolare la minima distanza fra r_1 e $r_2(k)$ al variare di k.*

Sol.: 1) $r_1 : AX = b$, $r_2(K) = \langle v_K \rangle + \langle w \rangle$. $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1$ ed $r_2(K)$ sono parallele per ogni K. Vediamo se si intersecano:

$Av_K = \begin{pmatrix} 4 \\ 4K-4 \end{pmatrix}$, $b - Av_K = \begin{pmatrix} -4 \\ 4K+8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall K \Rightarrow$ non si intersecano.

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$r_2(K) : \begin{cases} X = K \\ y + 2z = 3K - 4 \end{cases}$

3) π è il piano $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi : 3x - y + 2z = -4$

4) Sono paralleli

5) $\text{dist}(\pi, r_1) = \text{dist}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi\right) = \dfrac{|3-3+4|}{\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$ = minima distanza di r_1 da $r_2(k)$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1) $P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 & -3 & 5 \\ -1 & x-3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & x+4 \end{pmatrix}$

$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 & 5 \\ -1 & x-3 & 5 \\ -1 & -2 & x+4 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 & 5 \\ 0 & x-1 & 1-x \\ -1 & -2 & x+4 \end{pmatrix}$

$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1-x \\ -1 & x+2 & x+4 \end{pmatrix} = (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} x-2 & 3 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix}$

$= (x-1)^2 (x^2 - 4 + 3) = (x-1)^2 (x^2 - 1) = (x-1)^3 (x+1)$

2) $Sp(A) = \{-1, 1\}$. $ma_A(-1) = 1$, $ma_A(1) = 3$.

3) $mg_A(-1) = 1$, $mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \dim \operatorname{Ker}(1\ 2\ 3\ -5) = 3$.

4) $ma_A(-1) = mg_A(-1)$, $ma_A(1) = mg_A(1)$, $1, -1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$V_{-1}(A) = \operatorname{Ker}(-\mathbb{1}_4 - A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_1(A) = \operatorname{Ker}(1\ 2\ 3\ -5) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base standard di V. Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x + 2, 1 - 2x^2\}$.*

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}$ una base di V.*
2. *(1 punto) Sia $T : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(x^2 - 1) = 1 - 2x + x^2, \qquad T(2 + x) = -4 + 2x + 2x^2,$$
$$T(2 - 4x^2) = -1 + 6x - 5x^2.$$

   Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$ in partenza e nella base $\mathcal{C}$ in arrivo.

3. *(2 punti) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base $\mathcal{C}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Ker}(T)$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Im}(T)$.*
6. *(1 punto) Calcolare $dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$ e $dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T))$.*

Sol.: 1) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\det B = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1/2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5/2 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "e"'] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & V \arrow[d, "e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$C = AB^{-1}$.

Calcoliamo B^{-1} con Cramer: $(\det B = 1)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1/2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(C)$$

$$\mathrm{Ker}\, C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \langle 1 - 2x + x^2 \rangle$$

$$\mathrm{Im}\, C = \left\langle \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \langle -3 + 2x + x^2, -1 + x^2 \rangle$$

4) Per la formula di Grassmann

$$\dim(\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T) = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T = 3$$

Calcoliamo $\operatorname{Im} C \cap \operatorname{Ker} C$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ne segue che $\operatorname{Ker} C \subsetneq \operatorname{Im} C \Rightarrow \operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Im} T.$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T,$$
$$\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$$

$$\dim \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T = 1$$
$$\Rightarrow \quad \dim(\operatorname{Im} T + \operatorname{Ker} T) = 3 - 1 = 2 = \dim \operatorname{Im} T.$$

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su $Col(A)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su $Col(A)$.*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da $Col(A)$.*

Sol.: 1) $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Il sistema non è risolubile per il Teorema di Rouché-Capelli.

2) $Col\, A = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Poniamo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora $Col(A) = Col(B)$ e

$P = B(B^tB)^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

3) $b = Pb = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

4) $x = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5) $dist\,(b, Col(A)) = \| b - b' \| = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$