

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 4
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedì 27 Ottobre 2020

Esercizio 1. 1. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano U e W due sottospazi vettoriali di V tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che ogni vettore di V si scrive in maniera unica come la somma di un vettore di U ed uno di W .

2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di V

$$U = \langle 1 + x^2 + x^3 \rangle, \quad W = \langle 1 - x, 1 + x, (x - 1)^2 \rangle.$$

Si considerino i polinomi $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ e $q(x) = 1 + x^3$. Dimostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare $\text{pr}_U^W(p(x))$ e $\text{pr}_W^U(q(x))$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{K} e sia $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di un altro spazio vettoriale W sullo stesso campo \mathbb{K} . Sia $L : V \rightarrow W$ l'unica funzione lineare tale che

$$\begin{aligned}L(v_1) &= 2w_1 + 3w_2 - w_3 + w_4, & L(v_2) &= w_1 - w_3 - w_4, \\L(v_3) &= 3w_1 + 6w_2 - w_3 + 3w_4.\end{aligned}$$

1. Determinare L .
2. Trovare una base del nucleo di L .
3. Estendere la base del nucleo ad una base del dominio di L .
4. Trovare una base dell'immagine di L .
5. Estendere la base dell'immagine ad una base del co-dominio di L .

Esercizio 3. Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

1. Cosa vuol dire che L è lineare? (Dare la definizione.)
2. Scrivere la definizione di nucleo ed immagine di L e dimostrare che sono sottospazi vettoriali degli opportuni spazi vettoriali.
3. Assumiamo che V e W siano finitamente generati. Dimostrare che se L è iniettiva allora $\dim V \leq \dim W$ e che se L è suriettiva allora $\dim V \geq \dim W$. Vale anche il viceversa?
4. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Dimostrare che

L è un isomorfismo lineare $\iff L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ è una base di W .

Esercizio 4. Sia $L : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ l'unica applicazione lineare tale che

$$L(e_1 + e_2) = e_2, \quad L(e_1 - e_2) = e_1, \quad L(e_3 + e_4) = e_3, \quad L(e_3 - e_4) = e_4.$$

1. Determinare la matrice A tale che $L = S_A$.
2. Trovare $L(2e_1 + 2e_3)$.
3. Trovare $L^{-1}(e_1 - e_3)$.
4. Dimostrare che L è invertibile. (Suggerimento: guardare il punto (4) dell'esercizio 3.) Scrivere la matrice B tale che $L^{-1} = S_B$.

Esercizio 5. *Trovare una base dell'immagine ed una base del nucleo di ognuna delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & i \\ -1 & -2+i & -i \\ 2 & 4-2i & 2i \\ 1+i & 3-i & i-1 \end{pmatrix}.$$