Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 6
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 10 Novembre 2020

Esercizio 1. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e trovare le loro colonne dominanti. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -2 & -4 & 5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -6 & 1 & -7 & 11 & 0 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & 3 & -7 & 12 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *1. Descrivere tutte le possibili matrici 2×2 a scala ridotte.*

2. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *nei parametri reali* a, b, c, d, *trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)*

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici, e verificare il risultato con MATLAB:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*
2. *Trovare una base per il nucleo di f.*
3. *Trovare una base per l'immagine di f.*
4. *Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

5. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.*

Esercizio 5. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Consideriamo le seguenti funzioni*

$$F : V \to \mathbb{R}^4 : \; F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

$$L : V \to V : \; L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

1. *Dimostrare che F ed L sono lineari.*
2. *Trovare la base $\mathcal{B}$ tale che $F = F_{\mathcal{B}}$.*
3. *Trovare la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *Trovare la matrice associata ad L nella base standard (sia in partenza che in arrivo).*
5. *Mostrare che L è invertibile e calcolare l' inversa della matrice del punto precedente.*