

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 7
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedì 17 Novembre 2020

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice reale:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che A è invertibile.*
2. *Scrivere A come prodotto di matrici elementari.*
3. *Calcolare il determinante di ognuna di tali matrici elementari e verificare che il loro prodotto è uguale al determinante di A .*

12 Novembre 2020

Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 2. 1. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Si consideri la seguente matrice complessa:

$$B = \begin{pmatrix} 2 - i & 1 + i & 1 - i \\ 2i & -i & 2 + 2i \\ -2 + i & 1 + i & 3i \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda colonna;
(b) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda riga.

12 Novembre 2020

Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 3. Per ogni $n \geq 1$ si consideri la matrice $A(n)$ di taglia $n \times n$ la cui componente (i, j) è definita dalla formula

$$A(n)_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i < j \\ 2 & \text{se } i = j \\ 3 & \text{se } i > j \end{cases}$$

Calcolare $\det(A(2020))$.

12 Novembre 2020

Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 4. *Siano $L_1 : V_1 \rightarrow V_2$ e $L_2 : V_2 \rightarrow V_3$ due funzioni lineari.*

- 1. Dimostrare che $\text{rg}(L_2 \circ L_1) = \text{rg}(L_1)$ se L_2 è iniettiva.*
- 2. Dimostrare che $\text{rg}(L_2 \circ L_1) = \text{rg}(L_2)$ se L_1 è suriettiva.*
- 3. Esibire un esempio in cui $L_2 \circ L_1$ è un isomorfismo ma nè L_1 nè L_2 sono isomorfismi.*

12 Novembre 2020

Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$, cio le funzioni reali definite sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Sia

$$W = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x) \rangle.$$

Dati n punti x_1, \dots, x_n in $[0, 2\pi]$, definiamo $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^8 \rightarrow W$ in questo modo:

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} G(e_1) = 1 \\ G(e_2) = \cos(x) \\ G(e_3) = \sin(x) \\ \vdots \\ G(e_8) = \sin(2x) \end{matrix} .$$

Vogliamo trovare la dimensione di W e esibire una base estratta dai generatori di W .

1. Trovare 3 relazioni di dipendenza lineare fra i generatori di W (sfruttando le regole della goniometria).
2. Mostrare che F una funzione lineare.
3. Sfruttando il suggerimento del primo punto, scegliere 5 punti x_1, \dots, x_5 e scrivere la matrice A associata alla funzione $F \circ G$.
4. Identificare le 5 colonne dominanti di A e calcolare il determinante della matrice aventi come colonne le colonne dominanti di A . Qual una base di W estratta dai generatori sopra indicati?

12 Novembre 2020

Nome, Cognome e Matricola
