Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 9
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 1 Dicembre 2020

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema in tre variabili dipendente dal parametro k:*

$$\begin{array}{rcl} kx_2 + k^2x_3 & = & 1 \\ x_1 + (k-1)^2x_2 + (k-1)x_3 & = & 0 \\ (-k-1)x_1 + (k-1)x_2 + (1-k)x_3 & = & 1 \end{array}$$

Trovare i valori del parametro k per i quali il sistema è non-singolare e, per tali valori, calcolare l'unica soluzione utilizzando la formula di Cramer.

Esercizio 2. • *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di* $\mathbb{R}^3$

1. π_1: *il piano passante per i tre punti* $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ *e* $P_3 = (2,2,3)^t$;
2. π_2: *il piano passante per i tre punti* $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ *e* $P_4 = (1,0,1)^t$;
3. r: *la retta parallela al piano* π_1 *ed al piano* π_2 *e passante per il punto* $Q = (1,0,0)^t$.

• *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe e trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1.

Esercizio 3. *Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di sottospazi affini di* $\mathbb{R}^3$ *(senza cambiare la loro forma):*

1. $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y + z = 1$;

2. $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y - z = -1$;

3. $r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$; $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

Esercizio 4. *Siano* $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ *3 punti non allineati tali che l'area del triangolo* $P_1P_2P_3$ *sia 1.*

1. *Determinare la forma parametrica delle rette contenenti i lati del triangolo* $P_1P_2P_3$.
2. *Calcolare le coordinate dei punti* Q_1 *sul lato* P_2P_3 *in modo che il vettore* $P_2 - Q_1$ *sia il doppio del vettore* $Q_1 - P_3$, Q_2 *sul lato* P_3P_1 *in modo che* $P_3 - Q_2$ *sia il doppio del vettore* $Q_2 - P_1$ *e* Q_3 *definito similmente.*
3. *Calcolare l'area del triangolo* $Q_1Q_2Q_3$.
4. *Determinare la forma parametrica delle rette* r_1 *per* P_1 *e* Q_1, r_2 *per* P_2 *e* Q_2 *e* r_3 *per* P_3 *e* Q_3.
5. *Calcolare le coordinate dei punti* $X_1 = r_2 \cap r_3$, $X_2 = r_3 \cap r_1$, $X_3 = r_1 \cap r_2$.
6. *Calcolare l'area del triangolo* $X_1X_2X_3$.

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti 8 punti di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Fare un disegno che rappresenti il loro inviluppo convesso e calcolarne l'area.*

2. *Descrivere l'inviluppo affine di* P_1 *e* P_2*, l'inviluppo affine di* P_0 *e* P_1 *e l'inviluppo affine di* P_2*,* P_3 *e* P_4*.*

Esercizio 6. *Siano r e π una retta ed un piano di $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.*

1. *Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi : ax + by + cz = d$. Sia $A_\pi = (a, b, c)$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$A_\pi v$	$rg(A_\pi v \| d - A_\pi X_0)$
$r \subset \pi$		
$r \| \| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

2. *Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(v \| w_1 \| w_2)$	$rg(v \| w_1 \| w_2 \| X_0 - Y_0)$
$r \subset \pi$		
$r \| \| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

3. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. *Poniamo* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(A_r(w_1\|w_2))$	$rg(A_r(w_1\|w_2)\|\mathbf{b} - A_rY_0)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

4. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi : ax+by+cz = d$. *Siano* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ *e* $A_\pi = (a, b, c)$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det \left(\frac{A_r}{A_\pi} \right)$	$rg \left(\begin{array}{c\|c} A_r & \mathbf{b} \\ \hline A_\pi & d \end{array} \right)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		