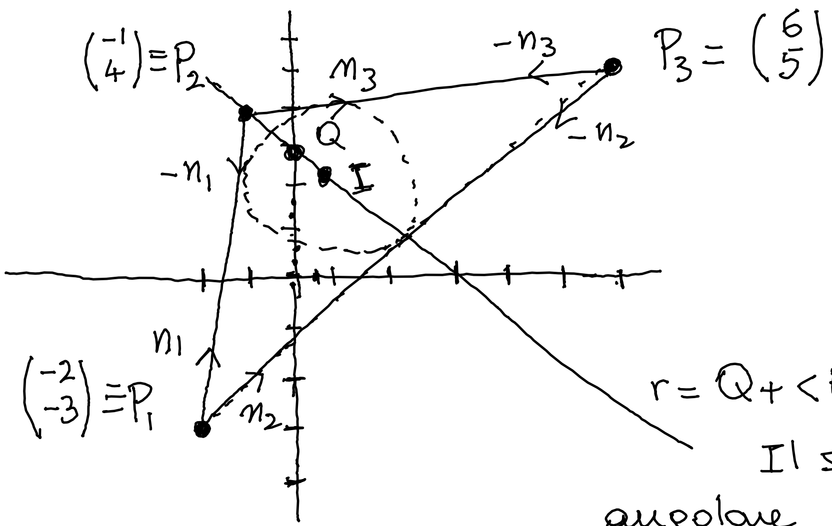
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i tre punti:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare le coordinate del punto P_3 ottenuto riflettendo ortogonalmente P_1 attraverso la retta passante per P_2 e Q.*
2. *(1 punto) Dimostrare che i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati.*
3. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane delle tre bisettrici del triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3.*
4. *(1 punto) Mostrare che le tre bisettrici concorrono e calcolare l'incentro I di T, ovvero la loro comune intersezione.*
5. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ inscritta in T ovvero la circonferenza interna tangente ai tre lati del triangolo.*

Sol.:

1)



$r = Q + \langle P_2 - Q \rangle : x + y = 3$

Il suo coefficiente angolare è $m = -1$.

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} m^2-1 & 2m \\ 2m & 1-m^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_3 = Q + Q_{-1}(P_1 - Q) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2) $\det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 8 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = -48 \neq 0$

3) $n_1 = \frac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $n_2 = \frac{P_3 - P_1}{\|P_3 - P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $n_3 = \frac{P_3 - P_2}{\|P_3 - P_2\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bisettrice in P_1 : $P_1 + \langle n_1 + n_2 \rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle : -2x + y = 1$

Bisettrice in P_2 $= r = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : x + y = 3$

Bisettrice in P_3 : $P_3 + \langle -n_3 - n_2 \rangle = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : -x + 2y = 4$

4) $\begin{cases} -2x+y=1 \\ x+y=3 \\ -x+2y=4 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$I = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

5) La retta s per P_1 e P_3 è ortogonale a r e passa per P_1.
Quindi ha equazione cartesiana

$$s: \ x-y=1.$$

Il raggio è $\operatorname{dist}(I,s) = \dfrac{\left|\frac{2}{3}-\frac{7}{3}-1\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3\sqrt{2}}$

$$\mathcal{C}: \ \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} + \frac{8}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Esercizio 2. *Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1(k) : \begin{cases} 5x + 3y + 2z = 1 + k \\ -3x - y + 2z = 1 - k \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per ogni valore di k si risponda alle seguenti domande.

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di $r_1(k)$ ed r_2.*
2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per $r_1(k)$ ed una forma cartesiana per r_2.*

Sia π il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contenga $r_1(k)$ per ogni k.

3. *(2 punti) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per π.*
4. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca fra π e r_2.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza fra π e r_2. Calcolare la minima distanza fra r_2 e $r_1(k)$ al variare di k.*

Sol.: Poniamo $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b_K = \begin{pmatrix} 1+K \\ 1-K \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1(K)$ ed r_2 sono parallele per ogni K.
Studiamo l'intersezione: $b_K - AX_0 = \begin{pmatrix} 1+K \\ 1-K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+K \\ 3-K \end{pmatrix}$
$b_K - AX_0 \in \langle Av \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3+K=0 \\ -1-K=0 \end{cases}$ impossibile $\Rightarrow r_1(K) \cap r_2 = \emptyset \ \forall K \in \mathbb{R}$.

2) $r_1(K) = \begin{pmatrix} -1+K/2 \\ 2-K/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $r_2 : \begin{cases} 5x+3y+2z = 2 \\ -3x-y+2z = -2 \end{cases}$.

3) "sommiamo le due equazioni di $r_1(K)$ e semplifichiamo":
$\pi : x+y+2z = 1$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) $2-4+2=0 \Rightarrow \pi$ ed r_2 sono paralleli. $1-1+2\cdot 0 = 0 \neq 1 \Rightarrow$ non si intersecano.

5) $\operatorname{dist}(\pi, r_2) = \operatorname{dist}(X_0, \pi) = \dfrac{|1-1-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$
Essa coincide con la minima distanza tra r_2 ed $r_1(K)$, al variare di K.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 7 & -5 \\ 10 & -4 & 12 & -9 \\ 14 & -4 & 15 & -12 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1.

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & x+3 & -7 & 5 \\ -10 & 4 & x-12 & 9 \\ -14 & 4 & -15 & x+12 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & x+3 & -7 & 5 \\ 4 & 0 & x+3 & -x-3 \\ -14 & 4 & -15 & x+12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & x+3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & -x-3 \\ -14 & 4 & x-3 & x+12 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & x+1 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & -x-3 \\ -14 & x+1 & x-3 & x+12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & -x+1 & -x-7 \\ 4 & 0 & 0 & -x-3 \\ -14 & x+1 & x-3 & x+12 \end{pmatrix}$$

$$= (x+1) \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 2 \\ 8 & -x+1 & -x-7 \\ 4 & 0 & -x-3 \end{pmatrix} = -(x+1)(x-1) \det \begin{pmatrix} x-3 & 2 \\ 4 & -x-3 \end{pmatrix}$$

$$= -(x+1)(x-1) \det \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ -x+1 & -x-3 \end{pmatrix} = -(x+1)(x-1) \det \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 0 & -x-1 \end{pmatrix} = (x+1)^2 (x-1)^2$$

2) $Sp(A) = \{1, -1\}$. $ma_A(1) = ma_A(-1) = 2$.

3) $V_{-1}(A) = Ker(-\mathbb{1}_4 - A) = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. $mg_A(-1) = 2$

$V_1(A) = Ker(\mathbb{1}_4 - A) = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$, $mg_A(1) = 2$

4) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base standard di V. Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = \{1 + 3x, -x + x^2, 1 + 4x - 2x^2\}$.*

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V.*
2. *(1 punto) Sia $T : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(1 + 3x) = 2 + 6x + 2x^2, \qquad T(-x + x^2) = -1 - 3x - x^2,$$
$$T(1 + 4x - 2x^2) = 4 + 14x + 3x^2.$$

   Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$ in partenza e nella base $\mathcal{C}$ in arrivo.

3. *(2 punti) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base $\mathcal{C}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Ker}(T)$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per $\mathrm{Im}(T)$.*
6. *(1 punto) Calcolare $dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$ e $dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T))$.*

Sol. : 1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 14 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "F_e"'] \arrow[r, equal] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_B"] & V \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$C = AB^{-1}$. Calcoliamo B^{-1} con Cramer ($\det B = 1$):

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 12 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rref}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Im}\, C = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) $\mathrm{Ker}\, T = \langle 1 + x + 2x^2 \rangle$. 5) $\mathrm{Im}\, T = \langle 2 + 12x - x^2, -2x + x^2 \rangle$.

6) Studiamo $\mathrm{Ker}\, C \cap \mathrm{Im}\, C$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 12 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, C \subset \mathrm{Im}\, C \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Im}\, T \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, T) = \dim \mathrm{Ker}\, T = 1$

$\dim(\mathrm{Im}\, T + \mathrm{Ker}\, T) = \dim(\mathrm{Im}\, T) = 2$.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su Col(A).*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su Col(A).*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da Col(A).*

Sol. : 1. $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ & \cdots & \end{array}\right) \leftarrow$ non è risolubile.

2. $\mathrm{Col}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Poniamo $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, cosicché $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(A')$ ma le colonne di A' sono ortogonali.

$P = A'(A'^t A')^{-1} A'^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/9 & -2/9 & 0 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & 0 & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/9 & -4/9 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}$

3. $b' = Pb = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1/3 \\ -2 & -4 & -2/3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

5. $\mathrm{dist}(b, \mathrm{Col}(A)) = \|b - b'\| = \left\| \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9} = 2.$