Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *di vertici*
$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare l'area di* T.
2. *(1 punto) Determinare il valore del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *tale che la circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0$ *contenga tutti e tre i punti* P_1, P_2 *e* P_3, *verificando che ognuno di essi vi appartiene.*
3. *(1 punto) Dato un qualsiasi triangolo di vertici* A, B *e* C *dare un'equazione cartesiana per l'altezza relativa al vertice* A *(ovvero la retta passante per* A *ed ortogonale al lato opposto ad* A*).*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane delle tre altezze* h_1, h_2 *e* h_3 *di* T *relative, rispettivamente, ai vertici* P_1, P_2 *e* P_3 .
5. *(1 punto) Determinare l'ortocentro di* T, *ovvero l'intersezione delle tre altezze e denotarlo con* H.
6. *(1 punto) Calcolare le coordinate del punto* P_0 *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'ortocentro* H *attraverso la retta passante per* P_2 *e* P_3.
7. *(1 punto) Dimostrare che* P_0, P_1, P_2, P_3 *giacciono sulla stessa circonferenza.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Risposte numeriche: Area$(T) =$ 21, $k =$ -15, $H = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 22 \\ 19 \end{pmatrix}$

h_1 : $-x + 3y = 7$ h_2 : $x - y = -1$ h_3 : $2x + y = 7$

Svolgimento:

1. $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}|\det(P_2 - P_1 | P_3 - P_1)| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\right| = 21$

2. $k = -15$, infatti

P_1 : $1 + 4 + 6 + 4 - 15 = 0$

P_2 : $9 + 16 - 18 + 8 - 15 = 0$

P_3 : $36 + 25 - 36 - 10 - 15 = 0$

3. L'altezza ha equazione $h_A : (B-C)\cdot(X-A)=0$.
Infatti la giacitura $(B-C)\cdot X=0$ è ortogonale al lato BC e chiaramente $A \in h_A$.

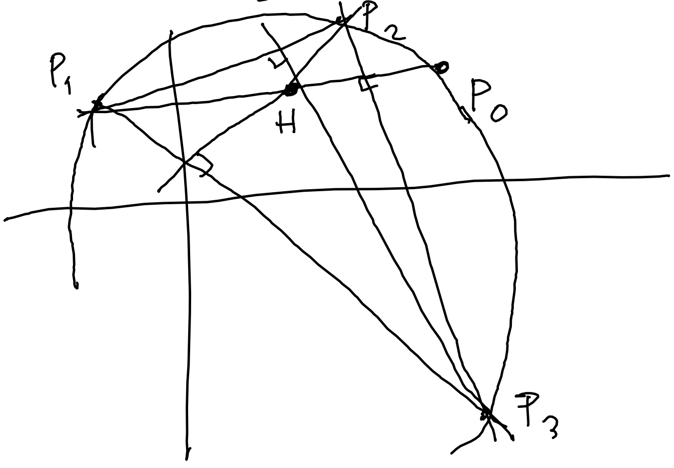
4. Usando il punto 3. abbiamo immediatamente

$$h_1 : -x+3y=7$$
$$h_2 : x-y=-1$$
$$h_3 : 2x+y=7$$

5. $H=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, infatti: $H \in h_1 : -2+3\cdot 3=7$
$H \in h_2 : 2-3=-1$
$H \in h_3 : 2\cdot 2+3=7$

6. $P_0 = P_2 + Q_m(H-P_2)$ dove $m=-3$ e $Q_m = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$
dunque $P_0 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}22\\19\end{pmatrix}$

7. $P_0 : \left(\frac{22}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6\cdot\frac{22}{5}+2\cdot\frac{19}{5}-15 = \frac{179}{5}-\frac{94}{5}-15=0$



Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x - y = -2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

1. *(2 punti) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Trovare una forma* cartesiana ~~*parametrica*~~ *per r_1*
3. *(1 punto) Trovare una forma* parametrica ~~*cartesiana*~~ *per r_2.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
5. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta r_3 avente le seguenti proprietà: 1) r_3 è ortogonale sia ad r_1 che a r_2; 2) r_3 interseca sia r_1 che r_2.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Per la posizione reciproca, studio il rango di $(Av_1 | b - AX_1)$

$= \begin{pmatrix} -1 & -2-1 \\ -2 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Poiché il rango $= 2$ le rette sono sghembe.

2. $r_1 : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$

3. $r_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Poniamo $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \frac{|v_3 \cdot (x_1 - x_2)|}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}.$$

5. r_3 si può esprimere come l'intersezione fra il

- il piano π_1 contenente r_1 e avente v_3 nella giacitura
- il piano π_2 " r_2 " " "

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi_1 : x - y + z = 3$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi_2 : x - 2y + z = 0$

dunque $r_3 : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

oanche $r_3 : \begin{cases} x + z = 6 \\ y = 3 \end{cases}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 6 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. $$p_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-6 & 18 & -6 & -4 \\ -2 & x+6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)\det\begin{pmatrix} x-6 & 18 & -6 \\ -2 & x+6 & -2 \\ -2 & 6 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)\det\begin{pmatrix} x-6 & 18 & -x \\ -2 & x+6 & 0 \\ -2 & 6 & x \end{pmatrix} = (x-2)x\det\begin{pmatrix} x-6 & 18 & -1 \\ -2 & x+6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)x\det\begin{pmatrix} x-8 & 24 & 0 \\ -2 & x+6 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (x-2)x\det\begin{pmatrix} x-8 & 24 \\ -2 & x+6 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)x(x^2-2x) = (x-2)^2x^2.$$

1. Segue subito dal punto 2 che $\mathrm{tr}\, A = 4$ e $\det A = 0$.

3. Dal punto 2 segue che $ma_A(0) = 2$
$ma_A(2) = 2$.

4. $mg_A(\lambda) = \dim\ker(\lambda \mathbb{1} - A)$.

Dunque

$\lambda = 0: mg_A(0) = \dim\ker(A) = \dim\ker\begin{pmatrix} 6 & -18 & 6 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \dim\ker\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

$\lambda = 2: mg_A(2) = \dim\ker(A - 2\mathbb{1}) = \dim\ker\begin{pmatrix} 4 & -18 & 6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \dim\ker\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

5. Poiché $Sp(A) = \{0, 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ e $mg_A(0) = ma_A(0)$
e $mg_A(2) = ma_A(2)$,

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Abbiamo che

$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 3 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ *la base standard di* V*. Consideriamo le funzioni* $L : V \to V$ *e* $F : V \to \mathrm{Mat}_{1\times 5}(\mathbb{R})$ *definite su un polinomio* $p(x) \in V$ *come segue*

$$L(p(x)) = p(x+1) + p(x), \quad F(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che le funzioni* L *e* F *sono lineari.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice* A *associata a* L *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
3. *(1 punto) Dimostrare che* L *è invertibile e calcolare* A^{-1}.
4. *(1 punto) Dimostrare che* F *ha rango massimo.*
5. *(1 punto) Sia* $p(x)$ *un qualunque polinomio appartenente a* V *tale che* $F(p(x)) = ((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4)$*. Dimostrare* $p(x) \in \mathrm{Ker}(L)$.
6. *(1 punto) Dimostrare che* $((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4) \notin \mathrm{Im}(F)$.

1. L è somma dell'identità e di $p(x) \mapsto p(x+1)$ che è una valutazione e dunque è lineare. Dunque L stessa è lineare.

F è lineare perché è una valutazione (nei punti: 0,1,2,3,4).

2. $L(1) = 2$, $L(x) = 2x+1$, $L(x^2) = 2x^2+2x+1$, $L(x^3) = 2x^3+3x^2+3x+1$, dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. L è invertibile perché A è invertibile perché $\det A = 8 \neq 0$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. Perché $\dim V = 4 < 5 = \dim Mat_{1\times 5}$, il massimo rango per F è 4 ed è ottenuto se e solo se F è iniettiva (per il teorema della dimensione).

$\ker F = \{ p(x) \in V : p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 0 \}$

dunque $\ker F = \{0\}$, perché polinomi non nulli con grado ≤ 3 hanno al più 3 radici (e non 5).

5. Sia $q(x) = L(p(x))$. Basta mostrare che $q(x) = 0$. Sicuramente $q(0) = p(1) + p(0) = -1 + 1 = 0$, similmente $q(1) = q(2) = q(3) = 0$. Dunque $q(x)$ è il polinomio nullo, altrimenti q avrebbe 4 radici; quindi $p(x) \in \operatorname{Ker} L$.

6. Per il punto 5, se $p(x) \in V$ è tale che $F(p(x)) = (1, -1, 1, -1, 1)$, dovremmo avere $p(x) \in \operatorname{Ker} L$ ma $\operatorname{Ker} L = 0$ per il punto 3, cioè $p(x) = 0$. Quindi $F(p(x)) = (0,0,0,0,0)$, assurdo.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente forma bilineare su* $\mathbb{R}^3$*:*

$$b(X,Y) = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) - 2(x_3 - x_1)(y_3 - y_1).$$

1. *(2 punti) Determinare la matrice A associata a b nella base standard.*
2. *(1 punto) Dare la definizione di nucleo di b e calcolarne una base.*
3. *(2 punti) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Calcolare una base di Sylvester per b e la corrispondente matrice di Sylvester.*
5. *(1 punto) Scrivere la forma quadratica associata a b nella base di Sylvester. Dedurre che l'insieme di vettori isotropi per b è dato dall'unione di 2 piani di $\mathbb{R}^3$.*

1. Abbiamo che $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\ker b = \{ X \in \mathbb{R}^3 : b(X,Y) = 0 \ \forall Y \in \mathbb{R}^3 \}$

Abbiamo visto che $\ker b = \ker A$.

$\ker A = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Poiché $\dim \ker A = 1$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forma una base del nucleo.

3. Un complementare di $\ker b$ è $\langle e_1, e_2 \rangle$.

Poiché $e_1^2 = a_{11} = -3 \neq 0$, e_1 non è isotropo. Possiamo applicare Gram-Schmidt alla base e_1, e_2 ottenendo la base ortogonale

$$v_1 := e_1, \quad v_2 := e_2 - \frac{b(e_2, e_1)}{b(e_1, e_1)} e_1 = e_2 + \frac{1}{3} e_1 .$$

Dunque una base ortogonale per b è (v_1, v_2, v_3). Poiché $v_1^2 = -3 < 0$, $v_2^2 = 1/3 > 0$, $sg(b) = (1, 1)$.

4. Dal punto 3 segue immediatamente che

$\left(\sqrt{3}\, v_2, \frac{1}{\sqrt{3}} v_1, v_3\right)$ è una base di Sylvester per b.

La matrice di Sylvester associata è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

5. Detto $v = x(\sqrt{3}\, v_2) + y\left(\frac{1}{\sqrt{3}} v_1\right) + z v_3$, si tratta di scrivere $q(v) = b(v,v)$ in funzione di x, y, z.

Dalla forma diagonale del punto 4 segue che

$q(v) = x^2 - y^2$.

L'insieme dei vettori isotropi per b è

$\{ v \in \mathbb{R}^3 : q(v) = 0 \} = \{ v : x - y = 0 \} \cup \{ v : x + y = 0 \}$.