

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo il triangolo T di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare l'area di T .
2. (1 punto) Determinare il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0$ contenga tutti e tre i punti P_1 , P_2 e P_3 , verificando che ognuno di essi vi appartiene.
3. (1 punto) Dato un qualsiasi triangolo di vertici A , B e C dare un'equazione cartesiana per l'altezza relativa al vertice A (ovvero la retta passante per A ed ortogonale al lato opposto ad A).
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane delle tre altezze h_1 , h_2 e h_3 di T relative, rispettivamente, ai vertici P_1 , P_2 e P_3 .
5. (1 punto) Determinare l'ortocentro di T , ovvero l'intersezione delle tre altezze e denotarlo con H .
6. (1 punto) Calcolare le coordinate del punto P_0 ottenuto riflettendo ortogonalmente l'ortocentro H attraverso la retta passante per P_2 e P_3 .
7. (1 punto) Dimostrare che P_0 , P_1 , P_2 , P_3 giacciono sulla stessa circonferenza.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Risposte numeriche: Area(T) = _____, k = _____, $H = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

h_1 : _____ h_2 : _____ h_3 : _____

Svolgimento:

Esercizio 2. Si considerino le seguenti due rette di \mathbb{R}^3 :

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x - y = -2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

1. (2 punti) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Trovare una forma cartesiana per r_1
3. (1 punto) Trovare una forma parametrica per r_2 .
4. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
5. (2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta r_3 avente le seguenti proprietà: 1) r_3 è ortogonale sia ad r_1 che a r_2 ; 2) r_3 interseca sia r_1 che r_2 .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 6 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare la traccia ed il determinante di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (1 punto) *Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A .*
4. (2 punti) *Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A .*
5. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 3 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base standard di V . Consideriamo le funzioni $L : V \rightarrow V$ e $F : V \rightarrow \text{Mat}_{1 \times 5}(\mathbb{R})$ definite su un polinomio $p(x) \in V$ come segue

$$L(p(x)) = p(x+1) + p(x), \quad F(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)).$$

1. (1 punto) Dimostrare che le funzioni L e F sono lineari.
2. (2 punti) Calcolare la matrice A associata a L nella base \mathcal{C} (sia in partenza che in arrivo).
3. (1 punto) Dimostrare che L è invertibile e calcolare A^{-1} .
4. (1 punto) Dimostrare che F ha rango massimo.
5. (1 punto) Sia $p(x)$ un qualunque polinomio appartenente a V tale che $F(p(x)) = ((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4)$. Dimostrare $p(x) \in \text{Ker}(L)$.
6. (1 punto) Dimostrare che $((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4) \notin \text{Im}(F)$.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente forma bilineare su \mathbb{R}^3 :*

$$b(X, Y) = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) - 2(x_3 - x_1)(y_3 - y_1).$$

1. (2 punti) *Determinare la matrice A associata a b nella base standard.*
2. (1 punto) *Dare la definizione di nucleo di b e calcolarne una base.*
3. (2 punti) *Calcolare la segnatura di b .*
4. (1 punto) *Calcolare una base di Sylvester per b e la corrispondente matrice di Sylvester.*
5. (1 punto) *Scrivere la forma quadratica associata a b nella base di Sylvester. Dedurre che l'insieme di vettori isotropi per b è dato dall'unione di 2 piani di \mathbb{R}^3 .*

