Esercizio 1. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.*

1. *(1 punto) Trovare il centro C ed il raggio $r > 0$ di $\mathcal{C}$.*

Per $\theta \in [0, 2\pi)$, denotiamo con $Q_\theta = C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

2. *(1 punto) Sia θ l'angolo* acuto *tale che $\sin\theta = \frac{4}{5}$. Trovare le coordinate dei punti $A = Q_\theta$ e $B = Q_{-\theta}$.*

Dati due punti distinti X e Y denotiamo con $\overline{XY}$ il segmento tra X e Y e con XY la retta passante per X e Y. Sia T il triangolo di vertici A, B e C.

3. *(1 punto) Sia M il punto medio di $\overline{AB}$. Calcolare le coordinate di M.*
4. *(1 punto) Sia P il piede dell'altezza di T relativa a B. Calcolare le coordinate di P.*
5. *(1 punto) Sia $H = PB \cap CM$. Calcolare le coordinate di H.*
6. *(1 punto) Sia N il punto medio di $\overline{HC}$. Calcolare le coordinate di N.*
7. *(1 punto) Dimostrare che i segmenti $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$ sono ortogonali.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *Siano* $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{R})$ *quattro matrici riga non-nulle e siano* $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. *Consideriamo i quattro piani*

$$\pi_1 : A_1X = b_1, \quad \pi_2 : A_2X = b_2, \quad \pi_3 : A_3X = b_3, \quad \pi_4 : A_4X = b_4.$$

Supponiamo che $rg \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \\ \hline A_3 & b_3 \\ \hline A_4 & b_4 \end{array}\right) = 4.$

1. *(2 punti) Quale può essere l'intersezione di* π_1, π_2, π_3 *e* π_4*?*

2. *(2 punti) Quale può essere l'intersezione di* π_1, π_2 *e* π_3*?*

Siano ora

$$\begin{aligned} A_1 &= (0 \quad -1 \quad 1), & b_1 &= 2; \\ A_2 &= (-1 \quad -7 \quad 3), & b_2 &= 10; \\ A_3 &= (1 \quad 5 \quad -2), & b_3 &= -8; \\ A_4 &= (-1 \quad -5 \quad 3), & b_4 &= 8. \end{aligned}$$

Siano $P_1 = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $P_2 = \pi_3 \cap \pi_4 \cap \pi_1$, $P_3 = \pi_4 \cap \pi_1 \cap \pi_2$.

3. *(3 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ *e sia* $f : V \to V$ *la funzione definita da:*

$$f(p(x)) = p(x) - p(-x).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice associata ad* f *nella base standard di* V.
3. *(2 punti) Calcolare* $\dim \operatorname{Ker} f$ *e* $\operatorname{rg} f$.
4. *(2 punti) Dimostrare che* $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Esercizio 5. *Sia* $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ *dove*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = v_1 + 2v_2 + v_3 \in \mathbb{R}^4.$$

1. *(3 punti) Determinare una base ortonormale di* W*.*
2. *(2 punti) Determinare la matrice di proiezione ortogonale* P_W *su* W*.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza del punto* $p = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ *da* W*.*