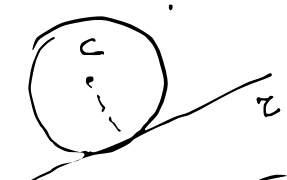


Esercizio 1. Consideriamo i seguenti punti del piano reale: $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta passante per P e di pendenza $m = 1/2$. Denominare tale retta r .
2. Calcolare la distanza tra C ed r .
3. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro C e tale che la retta r sia ad essa tangente.
4. Trovare il punto D ottenuto riflettendo C attraverso r .
5. Calcolare l'area del triangolo di vertici P, C, D .
6. Fare un disegno che illustri la situazione.

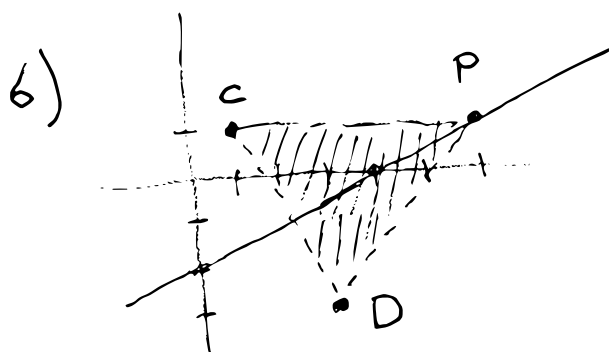
Sol. : 1) $\mathcal{L} = P + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle : y = \frac{1}{2}x - 2$

2) $\text{dist}(C, \mathcal{L}) = \text{dist}^{\perp} (C-P, \langle v \rangle) : \text{diagramma} = \| \text{pr}_{v^{\perp}}(C-P) \| =$
 $= \left\| \frac{(C-P) \cdot v^{\perp}}{v^{\perp} \cdot v^{\perp}} v^{\perp} \right\| = \frac{|(C-P) \cdot v^{\perp}|}{\|v^{\perp}\|} = \frac{| \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} |}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

3)  Il raggio è $\text{dist}(C, \mathcal{L}) = \sqrt{5}$. Quindi la circonferenza cercata ha equazione cartesiana $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ ed eq. parametrica $\{ C + r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \}$.

4) $D = P + Q_{\frac{1}{2}}(C-P) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4} & 1 \\ 2 & \frac{1}{4}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

5) $\text{Area} = \frac{1}{2} | \det(P-C \mid D-C) | = \frac{1}{2} | \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} | = 10$



Esercizio 2. Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:

$$r: \begin{cases} x+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. Trovare le equazioni parametriche di r .
2. Trovare le equazioni cartesiane di s .
3. Stabilire la posizione reciproca di r ed s .
4. Calcolare la distanza tra r ed s .

5. Calcolare l'area del triangolo di vertici $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: 1) $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

2) $s: \begin{cases} y=1 \\ x-z=-1 \end{cases}$

3) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ le rette giacciono sullo stesso piano $y=1$. Non sono parallele perché $\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

\Rightarrow Si intersecano in un punto P_0 . Cerchiamo P_0 :

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 2+t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cdot \begin{cases} 1+t+2+t=2 \\ 1+t+1+2+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$r \cap s = \left\{ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}$$

4) $\text{dist}(r, s) = 0$

5) $\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Stabilire se A è diagonalizzabile sui reali e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.

Sol.: $P_A(x) = x^2 - 3x - 4$. $\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$$\text{Sp}(A) = \{4, -1\}.$$

$$V_4(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{Ker} (2 \ -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-1}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} (1 \ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Studiare il seguente sistema lineare nelle quattro incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 7 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array} \right)$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{pmatrix} 6/17 \\ 0 \\ -4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - \text{Tr} A x^2 + \frac{1}{2} (\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2))x - \det A$$

$$\text{Tr} A = -3, \quad \text{Tr}(A)^2 = 9, \quad \text{Tr}(A^2) = 9, \quad \det A = 0$$

$$\Rightarrow P_A(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3).$$

$$Sp(A) = \{0, -3\}.$$

$$V_{-3}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0(A) = \text{Ker} A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_2'\| = \frac{1}{2} \sqrt{6}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2} \quad \|v_2'\| = \frac{1}{2} \sqrt{6} \quad \|v_3\| = \sqrt{3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$