Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 13 Ottobre 2020

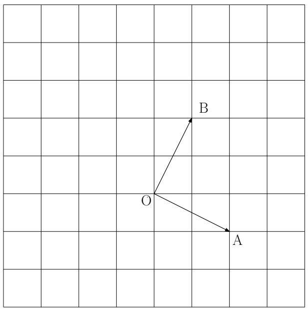
Esercizio 1. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*, stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale: (*$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$*)*

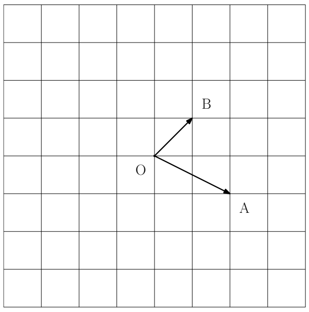
1. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2 - x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 \geq 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 x_2 x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
8. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 1\}$

Esercizio 2. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano $u, v \in V$. Calcolare $U \cap W$, motivando la risposta, nei seguenti casi:*

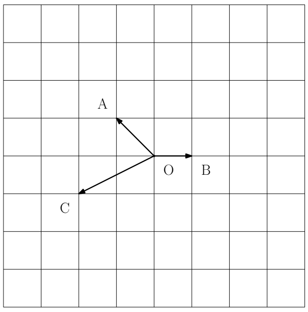
1. $U = \langle u, u+v \rangle$ *e* $W = \langle 2u+v \rangle$;
2. $U = \langle u+v, u-v \rangle$ *e* $W = \langle u, v \rangle$;
3. $U = \langle u+v \rangle$ *e* $W = \langle u+2v \rangle$.

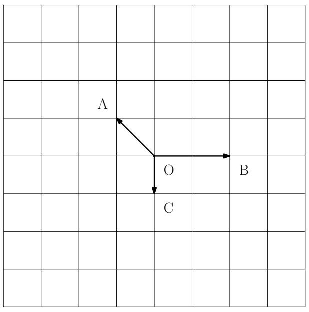
Esercizio 3. *1. Per le seguenti coppie di vettori geometrici $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ disegnare i vettori geometrici $\vec{OA}+\vec{OB}$, $(-2)\vec{OA}+\vec{OB}$, $2\vec{OB}$.*

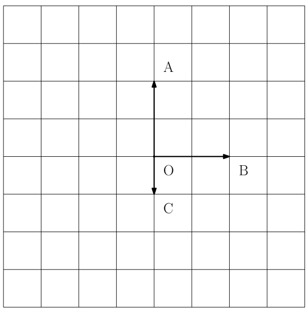


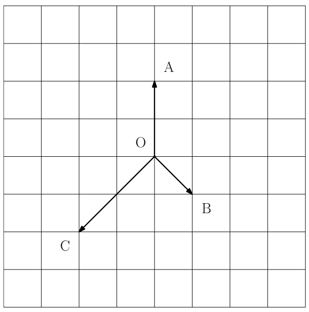


2. In ognuno dei seguenti casi, disegnare il vettore geometrico $(\vec{OA}+\vec{OB})+\vec{OC}$ e verificare che sia uguale a $\vec{OA}+(\vec{OB}+\vec{OC})$. Disegnare inoltre il vettore $2(\vec{OA}+\vec{OB})$ e verificare che sia uguale a $2\vec{OA}+2\vec{OB}$.









Esercizio 4. *Determinare se l'insieme* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *è linearmente indipendente oppure linearemente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$;
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$;
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$;
4. $v_1 = 1 + x$, $v_2 = 1 + x - x^2$, $v_3 = 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
5. $v_1 = \sin(x)$, $v_2 = \sin(2x)$, $v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Esercizio 5. *1. Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$*.*

2. Esprimere i seguenti vettori come combinazione lineare di ognuna delle basi $\mathcal{B}_1$*,* $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$