Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 3

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 20 Ottobre 2020

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile* x *di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - x, 1 + x, x + x^2, 2x - x^2 + 2x^3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}.$$

e sia $p(x) = 2 - 3x + 2x^2 - x^3$.

1. *Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *sono basi di* V.
2. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_1}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_1$.
3. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_2}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,|\, x_1 - 2x_2 + x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *Trovare una base di* U*.*
3. *Trovare una base di* $U \cap W$*.*
4. *Trovare una base di* $U + W$ *seguendo la dimostrazione della formula di Grassmann.*

Esercizio 3. *Siano*

$$U_1 = \{X \in \mathbb{C}^3 : x_1 + ix_2 = 0 \ e \ x_2 + ix_3 = 0\} \quad U_2 = \{X \in \mathbb{C}^3 : x_1 = -x_3\}$$

sottoinsiemi di $\mathbb{C}^3$ *(dove* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$*).*

1. *Mostrare che* U_1, U_2 *sono sottospazi di* $U_3 = \mathbb{C}^3$ *e che* $U_1 \subseteq U_2$*.*
2. *Scegliere una base* $\mathcal{B}_1$ *di* U_1*, estenderla a una base* $\mathcal{B}_2$ *di* U_2*, quindi estenderla a una base* $\mathcal{B}_3$ *di* $U_3 = \mathbb{C}^3$*.*
3. *Scrivere esplicitamente le funzioni delle coordinate* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_1}$*,* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_2}$*,* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_3}$ *(in altre parole, scrivere, dato un vettore generico* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *in* U_i*, tutte le componenti del vettore* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(X)$*).*

Esercizio 4. *Per ogni scelta del parametro reale t, fissiamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1-t \\ t-1 \\ 3t-3 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $U_t = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W_t = \langle v_3, v_4 \rangle$.

1. *Esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$?*
2. *Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap W_t) = 1$?*
3. *Determinare una base di $U_0 \cap W_0$, quindi estenderla a una base di $\mathbb{R}^4$.*

Esercizio 5. *Dati i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = Span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad V = Span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

stabilire se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ *tale che* $U \oplus W = V \oplus W = \mathbb{R}^4$*. In caso affermativo di determini* W *e si dica se è unico.*