Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 4

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 27 Ottobre 2020

Esercizio 1. 1. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano U e W due sottospazi vettoriali di V tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che ogni vettore di V si scrive in maniera unica come la somma di un vettore di U ed uno di W.*

2. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di V*

$$U = \langle 1 + x^2 + x^3 \rangle, \quad W = \langle 1 - x, 1 + x, (x-1)^2 \rangle.$$

Si considerino i polinomi $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ e $q(x) = 1 + x^3$. Dimostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare $pr_U^W(p(x))$ e $pr_W^U(q(x))$.

Esercizio 2. *Sia* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base di uno spazio vettoriale* V *su un campo* $\mathbb{K}$ *e sia* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *una base di un altro spazio vettoriale* W *sullo stesso campo* $\mathbb{K}$*. Sia* $L : V \to W$ *l'unica funzione lineare tale che*

$$L(v_1) = 2w_1 + 3w_2 - w_3 + w_4, \quad L(v_2) = w_1 - w_3 - w_4,$$
$$L(v_3) = 3w_1 + 6w_2 - w_3 + 3w_4.$$

1. *Determinare* L*.*
2. *Trovare una base del nucleo di* L*.*
3. *Estendere la base del nucleo ad una base del dominio di* L*.*
4. *Trovare una base dell'immagine di* L*.*
5. *Estendere la base dell'immagine ad una base del co-dominio di* L*.*

Esercizio 3. *Sia* $L : V \to W$ *un'applicazione lineare.*

1. *Cosa vuol dire che* L *è lineare? (Dare la definizione.)*
2. *Scrivere la definizione di nucleo ed immagine di* L *e dimostrare che sono sottospazi vettoriali degli opportuni spazi vettoriali.*
3. *Assumiamo che* V *e* W *siano finitamente generati. Dimostrare che se* L *è iniettiva allora* $\dim V \leq \dim W$ *e che se* L *è suriettiva allora* $\dim V \geq \dim W$. *Vale anche il viceversa?*
4. *Sia* $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base di* V. *Dimostrare che*

L *è un isomorfismo lineare* $\Longleftrightarrow L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), \cdots, L(v_n)\}$ *è una base di* W.

Esercizio 4. *Sia* $L : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$L(e_1 + e_2) = e_2, \quad L(e_1 - e_2) = e_1, \quad L(e_3 + e_4) = e_3, \quad L(e_3 - e_4) = e_4.$$

1. *Determinare la matrice* A *tale che* $L = S_A$.
2. *Trovare* $L(2e_1 + 2e_3)$.
3. *Trovare* $L^{-1}(e_1 - e_3)$.
4. *Dimostrare che* L *è invertibile. (Suggerimento: guardare il punto* (4) *dell'esercizio 3.) Scrivere la matrice* B *tale che* $L^{-1} = S_B$.

Esercizio 5. *Trovare una base dell'immagine ed una base del nucleo di ognuna delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & i \\ -1 & -2+i & -i \\ 2 & 4-2i & 2i \\ 1+i & 3-i & i-1 \end{pmatrix}.$$