Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 8

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 24 Novembre 2020

Esercizio 1. *Per ciascuno dei seguenti insiemi P di punti del piano cartesiano, calcolare l'area dell'unico poligono convesso avente come vertici P.*

Siano $p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. $P = \{p_1, p_2, p_3\}$.
2. $P = \left\{\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_2+p_3}{2}, \frac{p_3+p_1}{2}\right\}$.
3. $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Esercizio 2.

1. *Sia* $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 5}$ *e siano* $\lambda_1, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{K}$. *Mostrare che i polinomi*

$$(x+\lambda_1)^5, \quad (x+\lambda_2)^5, \quad (x+\lambda_3)^5, \quad (x+\lambda_4)^5, \quad (x+\lambda_5)^5, \quad (x+\lambda_6)^5,$$

   sono linearmente indipendenti se e solo se $\lambda_i \neq \lambda_j$ *per ogni* $i \neq j$.

2. *Sia* $V = \mathbb{R}^{(-1,1)}$ *lo spazio delle funzioni reali sull'intervallo* $(-1, 1)$. *Sia* $n \geq 2$ *un intero e sia*

$$S = \{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots, \cos(nx)\} \subset V.$$

   Mostrare che l'insieme S *è linearmente indipendente. [Suggerimento: derivare due volte e valutare in zero ripetutamente.]*

   Concludere che V *non può essere finitamente generato.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro k:*

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & k & k^2 \\ 1 & (k-1)^2 & k-1 \\ -k-1 & k-1 & 1-k \end{pmatrix}$$

Utilizzare il teorema degli orlati per trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali

1. $rg(A(k)) = 1$;
2. $rg(A(k)) = 2$;
3. $rg(A(k)) = 3$.

Esercizio 4. *Calcolare il polinomio interpolatore dei seguenti punti di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ovvero l'unico polinomio p *in* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *il cui grafico contenga tali punti. Fare un disegno indicativo.*

Esercizio 5. *Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali dell'opportuno $\mathbb{K}^n$, calcolare una forma cartesiana:*

1. $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$
2. $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$
3. $U_3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$
4. $U_4 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$
5. $U_3 \cap U_4$