Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 12

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 22 Dicembre 2020

Esercizio 1. *Si considerino le rette affini di* $\mathbb{R}^3$ $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* n *rispetto a* v_1 *e* v_2.
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$ *(qui* v_1 *e* v_2 *sono pensati come punti).*
3. *Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2.
4. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_1.
6. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_2.
7. *Calcolare la distanza tra* P *ed* r_1 *e tra* P *ed* r_2.
8. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, Q_1 *e* Q_2.

Esercizio 2. *Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB (il comando `charpoly` *restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico).*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. *Calcolare A^{10}.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile in* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.
2. *Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t A B = D$.
3. *Calcolare l'inversa di* A *utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*

Esercizio 5. *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1 - x_2 - 1.$$

Ridurre a forma canonica metrica e affine la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.