Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Appello di settembre 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli, Marco Trevisiol

13 settembre 2022

Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Denotiamo con r la retta passante per A ed avente pendenza $m = \frac{1}{3}$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane di r.*

2. *(2 punti) Calcolare la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r e denotarla D.*

3. *(1 punto) Calcolare il punto B ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto A attraverso la retta passante per C e D.*

4. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e tangente alla retta r.*

5. *(1 punto) Calcolare l'area del settore circolare del cerchio la cui circonferenza è $\mathcal{C}$ racchiuso nell'angolo convesso ACB.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard consideriamo i tre sottospazi affini:*

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-4 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \quad \pi : \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r_1 e r_2 senza cambiare la loro forma.*
2. *(2 punti) Dimostrare che r_1 e π si intersecano in un unico punto Q senza cambiare la loro forma.*
3. *(2 punti) Calcolare i due punti P_1 e P_2 tali che $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e $dist(P_1, P_2) = dist(r_1, r_2)$.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e Q.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare una base del nucleo di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*
4. *(1 punto) Trovare una matrice diagonale D e due matrici invertibili B_1 e B_2 tali che $B_2^{-1}AB_1 = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{100} (suggerimento: usare Cayley-Hamilton).*

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ *data da*

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* F *è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare* $F(x^2 + x + 1)$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* V *associata ad* F *nelle basi standard* $(1, x, x^2)$ *e* (e_1, e_2, e_3).
4. *(1 punto) Dimostrare che* F *è un isomorfismo.*
5. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ *di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *tale che la matrice associata ad* F *nelle basi* $\mathcal{B}$ *e nella base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *sia l'identità.*
6. *(1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore* p *dei tre punti* $(-1, 1)$, $(0, 2)$ *e* $(1, 0)$, *ovvero l'unico polinomio tale che* $F(p) = (1, 2, 0)^t$.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e denotiamo b_A *la corrispondente forma bilineare* $b_A(X,Y) = X^t AY$ *su* $\mathbb{R}^3$.

1. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di* $(\mathbb{R}^3, b_A)$.
2. *(2 punti) Calcolare la segnatura di* A.
3. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester* $\mathcal{S} = (E_1, E_2, E_3)$ *per* b_A.
4. *(1 punto) Sia* $v = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ *un vettore di* $\mathbb{R}^3$ *scritto nella base* $\mathcal{S}$. *Trovare un'equazione nelle variabili* x_1, x_2, x_3 *che descrive la proprietà di* v *di essere isotropo.*
5. *(1 punto) Scegliere un qualunque vettore isotropo non-nullo* v. *Calcolare la dimensione di* $\langle v\rangle^\perp$ *e trovare una sua base.*