Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 6

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 9 Novembre 2021

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici, e verificare il risultato con MATLAB:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*

2. *Trovare una base per il nucleo di f.*

3. *Trovare una base per l'immagine di f.*

4. *Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

   $$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

5. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.*

Esercizio 3. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Consideriamo le seguenti funzioni*

$$F : V \to \mathbb{R}^4 : \; F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

$$L : V \to V : \; L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

1. *Dimostrare che F ed L sono lineari.*
2. *Trovare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $F = F_{\mathcal{B}}$.*
3. *Trovare la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *Trovare la matrice associata ad L nella base standard (sia in partenza che in arrivo).*
5. *Mostrare che L è invertibile e calcolare l' inversa della matrice del punto precedente.*

Esercizio 4. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A e B stabilire se sono simili (ovvero se S_A ed S_B sono simili) e nel caso lo siano trovare degli isomorfismi F_1 ed F_2 tali che $S_B \circ F_1 = F_2 \circ S_A$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbf{1}_2.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 2+2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & -1+i & 1 \\ -i & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. *Sia* W *il seguente sottospazio vettoriale di* V*:*

$$W = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\rangle.$$

Vogliamo calcolare la dimensione di W *ed esibire una base estratta dai suoi generatori. Per farlo useremo una matrice associata ad un'opportuna funzione lineare. Prima di tutto risolvere questo:*

1. *Sfruttando le regole della goniometria trovare* 3 *generatori di* W *che sono combinazioni lineari degli altri cinque.*

Da qui deduciamo che $\dim W \leq 5$. *Adesso dimostriamo che* $\dim W = 5$. *Per farlo consideriamo le seguenti funzioni: dati* 5 *punti* $x_1, \ldots, x_5 \in [0, 2\pi]$, *definiamo la funzione (dipendente da questi punti scelti)* $F : W \to \mathbb{R}^5$

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_5) \end{pmatrix}$$

Definiamo anche la funzione $G : \mathbb{R}^8 \to W$ *come l'unica funzione lineare tale che* $G(e_i)$ *è l'i-esimo generatore di* W*, ovvero*

$$\begin{array}{llll} G(e_1) = 1, & G(e_2) = \cos(x), & G(e_3) = \sin(x), & G(e_4) = \cos^2(x), \\ G(e_5) = \sin^2(x), & G(e_6) = \cos(x)\sin(x), & G(e_7) = \cos(2x), & G(e_8) = \sin(2x). \end{array}$$

Adesso possiamo concludere risolvendo i seguenti problemi:

2. *Mostrare che* F *è una funzione lineare. Osservare che la funzione composta* $F \circ G : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ *è lineare (e dipende dalla scelta di* $x_1, \ldots, x_5$*).*

3. *Scegliere* 5 *punti* $x_1, \ldots, x_5 \in [0, 2\pi]$ *opportunamente e scrivere la matrice* A *associata alla funzione* $F \circ G$.

4. *Calcolare il rango ed una base di* A.

5. *Calcolare una base di* W *estratta dai suoi generatori.*