Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria Civile
Appello di Gennaio 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli, Marco Trevisiol

24 gennaio 2022

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Sia M il punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare M.*
2. *(1 punto) Sia r l'asse del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di r.*
3. *(2 punti) Trovare un punto P_3 dell'asse r che abbia coordinate intere positive e tale che il triangolo $T = P_1\overset{\triangle}{P_2}P_3$ di vertici P_1, P_2, P_3 abbia area uguale a $\frac{15}{2}$.*
4. *(2 punti) Scrivere il baricentro B di T come combinazione convessa di M e di P_3.*
5. *(2 punti) Ogni punto P del segmento $\overline{MP_3}$ divide il triangolo T in tre triangoli*
$$T_1 = P_3\overset{\triangle}{P}P_2, \quad T_2 = P_1\overset{\triangle}{P}P_3, \quad T_3 = P_1\overset{\triangle}{P}P_2\ .$$
Dimostrare che $Area(T_1) = Area(T_2)$. Sia $t = \frac{Area(T_1)}{Area(T)} = \frac{Area(T_2)}{Area(T)}$ e denotiamo il corrispondente punto P come P_t. Dimostrare che $B = P_{1/3}$ e disegnare il segmento $S = \{P_t | t \in [0, 1/3]\}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = -1 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*

2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per* r_1 *ed una forma cartesiana per* r_2*.*

3. *(2 punti) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*

4. *(2 punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *contenente* r_2 *e parallelo ad* r_1*.*

5. *(1 punto) Si consideri la seguente famiglia di rette parallele ad* r_1 *dipendente dal parametro reale* k*:*

$$r_1(k) : \begin{cases} x - y + 3z = k \\ 2x - 3y + 4z = k \end{cases}$$

   Trovare tutti i valori di k *per i quali* $r_1(k) \subset \pi$*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di* 2 *a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ *la base standard di* V. *Si consideri l'insieme* $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, 1 + x + x^2\}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.

2. *(1 punto) Sia* $T : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(1 + x) = 1, \quad T(1 + 2x) = 2, \quad T(1 + x + x^2) = 1 + 2x^2.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *in partenza e nella base* $\mathcal{C}$ *in arrivo.*

3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*

4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.

5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.

6. *(1 punto) Calcolare* $dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$ *e* $dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T))$.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su $Col(A)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su $Col(A)$.*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da $Col(A)$.*