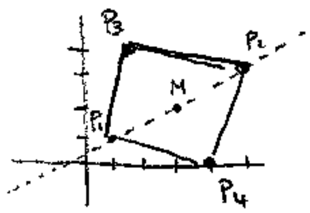
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per* P_1 *e* P_2.
2. *(1 punto) Trovare due punti* P_3 *e* P_4 *tali che il quadrilatero di vertici* P_1, P_2, P_3 *e* P_4 *sia un quadrato ed abbia il segmento* $\overline{P_1P_2}$ *come* diagonale.
3. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrato trovato al punto precedente.*
4. *(3 punti) Sia* $\mathcal{C}(C, r)$ *una qualunque circonferenza di centro* C *e raggio* r. *Dimostrare un teorema di Talete che dice che dato comunque un diametro* $\overline{Q_1Q_2}$ *di* $\mathcal{C}(C, r)$ *ed un punto* P *di* $\mathcal{C}(C, r)$ *diverso da* Q_1 *e* Q_2, *il triangolo di vertici* Q_1, P *e* Q_2 *è rettangolo in* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Sol. :



1) $P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle : \quad 2x - 4y = -2$

2) $M = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P_3 = M + R_{\frac{\pi}{2}}(P_2 - M) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$P_4 = M - R_{\frac{\pi}{2}}(P_2 - M) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Il centro di $\mathcal{C}$ è M ed il raggio $r = \frac{\text{lato}}{2} = \frac{\|P_2 - P_1\|}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

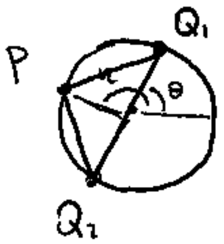
$\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{2}$

4) I punti di $\mathcal{C}(C, r)$ sono $Q_\theta = C + rP_\theta$ con $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

Poniamo $Q_1 = Q_\theta$. Allora $Q_2 = Q_{\theta+\pi} = C - rP_\theta$

$P = Q_\eta \Rightarrow \vec{PQ_1} \cdot \vec{PQ_2} = (Q_1 - P) \cdot (Q_2 - P) = r^2 (P_\theta - P_\eta) \cdot (P_\theta + P_\eta)$

$= r^2 (P_\theta^2 - P_\eta^2) = r^2 (1 - 1) = 0.$



Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino* $n = (1, 2, 3)^t$ *e* $P = (1, 2, -1)^t$.

1. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *passante per* P *ed avente* n *come vettore normale.*

2. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *ottenuta come intersezione di* π *con il piano* $\sigma : x + y + z = 1$.

3. *(2 punti) Calcolare la distanza di* P *da* r.

4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *sul piano* σ.

Sol.: 1) $\pi : x+2y+3z = 2$, $\pi = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

2) $r : \begin{cases} x+2y+3z = 2 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \iff r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y+2z = 1 \end{cases} \quad r = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{=X_0} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{=v} \right\rangle$

3)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{dist}(P, r) &= \min_t \mathrm{dist}(P, X_0 + tv) = \\
&= \min_t \mathrm{dist}(P - X_0, tv) = \\
&= \| P - X_0 - pr_v(P - X_0) \| = \\
&= \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\| = \\
&= \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}4/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{21} = \sqrt{\frac{7}{3}}
\end{aligned}
$$

4) Sia $Y_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \sigma$. $P - Y_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\sigma_0 : x+y+z = 0$

$$
\begin{aligned}
pr_{\sigma_0}(P - Y_0) &= P - Y_0 - pr_{\sigma_0^\perp}(P - Y_0) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-4/3\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
pr_\sigma(P) = Y_0 + pr_{\sigma_0}(P - Y_0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\5/3\\-4/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}
$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A.*
2. *(2 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se gli autospazi di A sono ortogonali tra loro.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.:

1) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & 4 & -6 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & x-4 & 2 \\ 4 & -6 & -8 & x+6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & 4 & -6 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & x+4 & -x-4 \\ 4 & -6 & -8 & x+6 \end{pmatrix}$

$= (x+4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & 4 & -6 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & -8 & x+6 \end{pmatrix} = (x+4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & 4 & -2 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -8 & x-2 \end{pmatrix}$

$= (x+4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & -2 \\ -4 & x+2 & -2 \\ 4 & -6 & x-2 \end{pmatrix} = (x+4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & -2 \\ -4 & x+2 & -2 \\ 0 & x-4 & x-4 \end{pmatrix}$

$= (x+4)(x-4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 2 & -2 \\ -4 & x+2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (x+4)(x-4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 4 & -2 \\ -4 & x+4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (x+4)(x-4)\det\begin{pmatrix} x-4 & 4 \\ -4 & x+4 \end{pmatrix} = (x+4)(x-4)\det\begin{pmatrix} x & 4 \\ x & x+4 \end{pmatrix}$

$= (x+4)(x-4)\det\begin{pmatrix} x & 4 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \boxed{x^2(x+4)(x-4)}$.

$\Rightarrow \boxed{Sp(A) = \{0, -4, 4\}}$

2) $V_0(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $V_4(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $V_{-4}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

3) Sì. Infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

4) Non è diagonalizzabile perché $ma_A(0) = 2 \neq 1 = mg_A(0)$.

Esercizio 4. *Consideriamo le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_A$ di $Col(A)$ ed una base $\mathcal{B}_C$ di $Col(C)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che A, C ed I sono simili.*
3. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_C$ è una base di $\mathbb{R}^4$.*
4. *(2 punti) Trovare la matrice C' che rappresenta S_C nella base canonica in partenza e nella base $\mathcal{B}_2$ in arrivo.*
5. *(2 punti) Trovare una base $\mathcal{B}_1^A$ di $\mathbb{R}^3$ ed una base $\mathcal{B}_2^A$ di $\mathbb{R}^4$ tali che la matrice che rappresenta S_A in queste basi sia la matrice I.*

Sol.:

1) Il minore $[1,2]\times[1,2]$ di A è $-3 \neq 0$ per cui $\{A^1, A^2\}$ è lin. Ind.

Inoltre $A^3 = \frac{1}{3}(A^1 + A^2) \in \langle A^1, A^2 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_A = (A^1, A^2)$.

Il minore $[1,2]\times[2,3]$ di C è $1 \neq 0$ per cui $\mathcal{B}_C = (C^1, C^2)$.

2) $\text{rg}\, A = \text{rg}\, C = \text{rg}\, I = 2 \Rightarrow A, C, I$ sono simili.

3) $\mathcal{B}_2 = (A^1, A^2, C^1, C^2)$. Consideriamo la matrice

$B_2 = (A^1 | A^2 | C^1 | C^2) \rightsquigarrow \text{rref}(B_2) = \mathbb{1}_4 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^4$

4) $$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $\mathcal{B}_1^A = (e_1, e_2, e_3 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2)$, $\mathcal{B}_2^A = \mathcal{B}_2$.

Esercizio 5. *Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

1. *(3 punti) Trovare delle condizioni sui parametri affinché lo spettro di A sia reale.*
2. *(1 punto) Trovare una condizione sui parametri affinché la matrice A sia ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *(3 punti) Per i valori trovati al punto precedente trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ composta di autovettori per A.*

Sol.: 1) $p_A(x) = x^2 - 2ax + a^2 - bc$. Le radici sono $Sp(A) = \{a \pm \sqrt{bc}\}$. Per cui $Sp(A) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow bc \geq 0$.

2) Per il teorema spettrale A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$ se e solo se $b = c$

3) Se $b = c$, $p_A(x) = (x - a - b)(x - a + b)$.

$$V_{a+b}(A) = \mathrm{Ker}\left((a+b)\mathbb{1}_2 - A\right) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} b & -b \\ b & -b \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} b & -b \end{pmatrix}$$

$$V_{a-b}(A) = \mathrm{Ker}\left((a-b)\mathbb{1}_2 - A\right) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -b & -b \\ -b & -b \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} b & b \end{pmatrix}$$

Se $b \neq 0$, $V_{a+b}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $V_{a-b}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Se $b = 0$, $A = a\mathbb{1}_2$ e $V_a(A) = \mathbb{R}^2$

In ogni caso, la base $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ composta di autovettori di A.