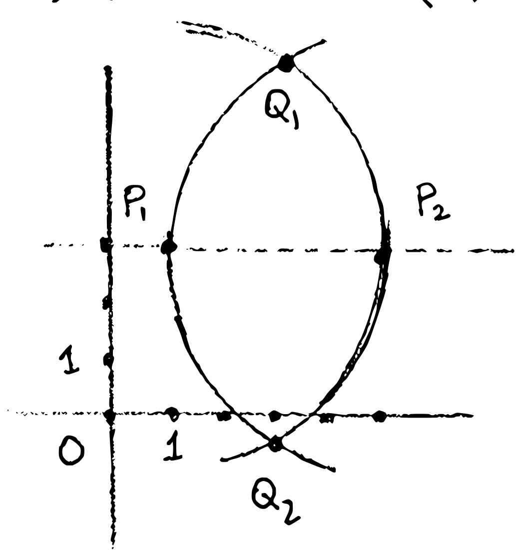
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2.
2. *(2 punti) Trovare due punti distinti* Q_1 *e* Q_2 *tali che i triangoli* $Q_1P_1P_2$ *e* $Q_2P_1P_2$ *siano equilateri.*
3. *(1 punto) Dimostrare che esiste una circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrilatero* $Q_1P_1Q_2P_2$. *Determinare il centro* C *ed il raggio* r *di* $\mathcal{C}$.
4. *(1 punto) Determinare l' equazione cartesiana di* $\mathcal{C}$.
5. *(1 punto) Sia* $Q_\theta = C + rP_\theta$, *dove* $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, *un punto della circonferenza* $\mathcal{C}$. *Disegnare* Q_0, $Q_{\pi/4}$ *e* $Q_{\pi/2}$. *Stabilire i valori dell'angolo* θ *per i quali* Q_θ *appartiene ai lati del quadrilatero* $Q_1P_1Q_2P_2$.

Fare un disegno (possibilmente usando riga e compasso) che illustri la situazione.

Sol.: 1) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \quad y = 3$

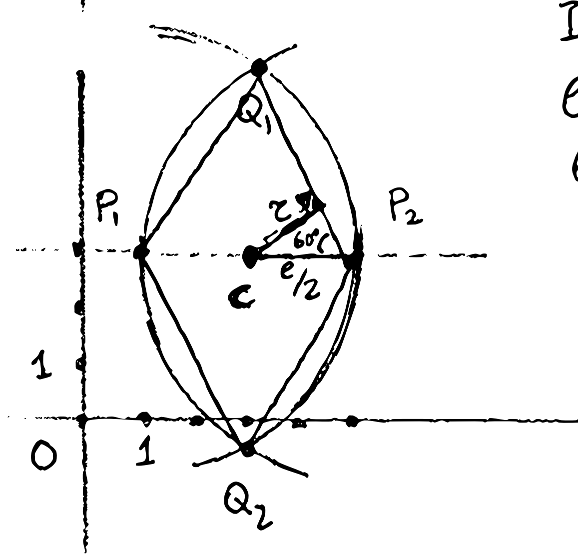
2)



$$Q_1 = P_1 + R_{\frac{\pi}{3}}(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = P_1 + R_{-\frac{\pi}{3}}(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

3)



Il quadrilatero è un rombo di lato $\ell = \|P_2 - P_1\| = 4$. Quindi esiste la circonferenza inscritta.

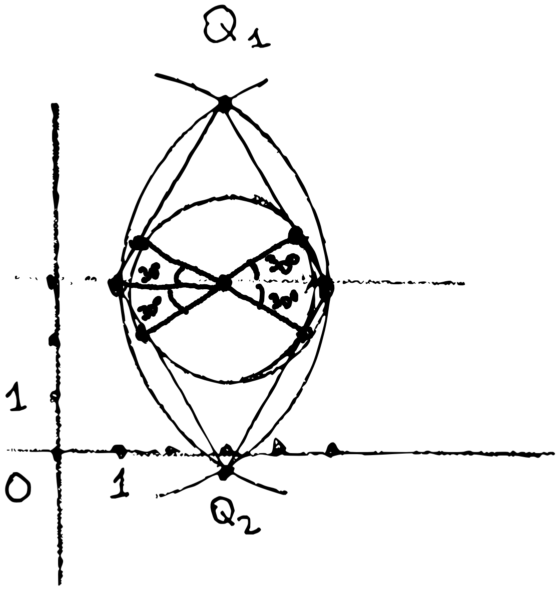
$$C = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

4) $\mathcal{C}$ ha centro $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio $r = \sqrt{3}$. Quindi

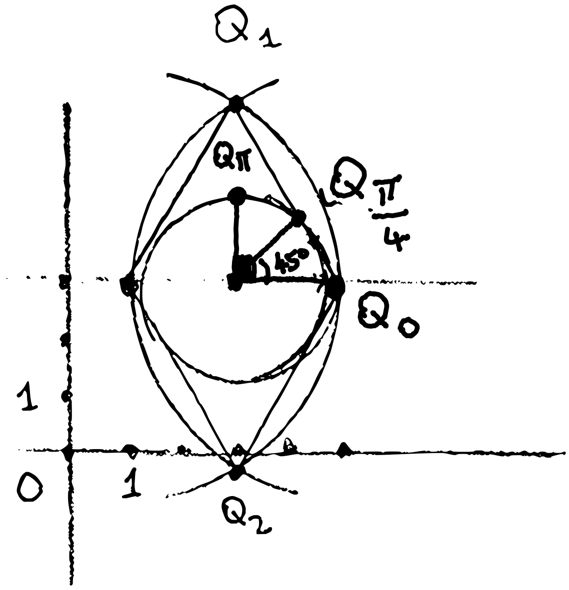
$\mathcal{C}: \ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 3$

5)



I punti di contatto sono $Q_{\frac{\pi}{6}}$, $Q_{\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi}$,

$Q_{\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi}$, $Q_{2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi}$.



Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino i quattro punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Dimostrare che* P_1, P_2 *e* P_3 *non sono allineati.*
2. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *passante per* P_1, P_2 *e* P_3.
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_{π_0} *di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura* π_0 *di* π.
4. *(1 punto) Calcolare la distanza di* Q *da* π.
5. *(1 punto) Calcolare il volume della piramide avente come vertici* P_1, P_2, P_3 *e* Q. *(Può essere utile ricordare che il volume della piramide è base per altezza diviso tre.)*

Sol.: 1) Poniamo $v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Essi sono ovviamente linearmente indipendenti e quindi P_1, P_2, P_3 non appartengono ad una stessa retta.

2) $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \; : \; 2x + y = 3$

3) $P_{\pi_0} = A(A^tA)^{-1}A^t$ dove $A = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. calcoliamo:

$$(A^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\pi_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4) $\mathrm{dist}(Q, \pi) = \mathrm{dist}(Q - P_1, \pi_0) = \| Q - P_1 - P_{\pi_0}(Q - P_1) \|$. $Q - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P_{\pi_0}(Q - P_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad Q - P_1 - P_{\pi_0}(Q - P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{dist}(Q, \pi) = \sqrt{5}$

5) $\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{Area}(\widehat{P_1P_2P_3})\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{3} \underbrace{\frac{\| v_1 \wedge v_2 \|}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{6}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante e la traccia di A.*
2. *(1 punto) Stabilire se A è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*

Sol.: 1) $\det A = 0$ perché A ha due righe uguali. $\mathrm{Tr}\, A = 1$

2) Poiché $\det A = 0$, A non è invertibile.

3) $$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ -1 & -2 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$= x \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ -2 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ -2 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & -3 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$= x^2 \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 (x^2 - x - 3)$$

4) $A = A^t$. Per il Teorema spettrale A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$x^2 - x - 3 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. $Sp(A) = \left\{ 0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\}$.

$V_0(A) = \mathrm{Ker}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sia $\lambda : \lambda^2 - \lambda - 3 = 0$. Allora $V_\lambda(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per cui $V_{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $V_{\frac{1-\sqrt{13}}{2}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Una base di autovettori è $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Esercizio 4. *Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ gli spazio vettoriali reali dei polinomi di grado ≤ 2 e ≤ 4 a coefficienti reali, rispettivamente. Consideriamo la funzione $F : V \to W$ data da*

$$F(p(x)) = p(x^2) - p(x).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che F è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare $F(x^2 - 1)$.*
3. *(2 punti) Scrivere la matrice associata ad F nelle basi standard.*
4. *(3 punti) Calcolare basi di nucleo ed immagine di F.*

<u>Sol.</u>: 1. $F = Val_{x^2} - Id$. Quindi F è combinazione lineare di funzioni lineari e quindi è lineare.

2. $F(x^2-1) = x^4 - 1 - x^2 + 1 = x^4 - x^2$

3. $F(1) = 0$, $F(x) = x^2 - x$, $F(x^2) = x^4 - x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\operatorname{Ker} A = \langle e_1 \rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} F = \langle 1 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} F} = (1)$

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A} = (A^2, A^3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} F} = \{x^2 - x, x^4 - x^2\}$.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente funzione bilineare in tre variabili reali*

$$b(X,Y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere la matrice A associata a b nella base standard di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester associata a b.*
5. *(1 punto) Siano $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ i tre autovalori della matrice A trovata al punto 1. Stabilire se $\lambda_1\lambda_3 \ge 0$.*

<u>Sol.</u>: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $F_1 = e_1$, $e_1^2 = 1 \neq 0$

$F_2 = e_2 - \frac{b(e_2,F_1)}{F_1^2} F_1 = e_2 - e_1$. $F_2^2 = e_2^2 + e_1^2 - 2b(e_1,e_2) = 0 + 1 - 2 = -1 \neq 0$

$F_3 = e_3 - \frac{b(e_3,F_1)}{F_1^2} F_1 - \frac{b(e_3,F_2)}{F_2^2} F_2 = e_3 - 0F_1 - \frac{1}{-1}(e_2 - e_1) = e_3 + e_2 - e_1$

$F_3^2 = e_3^2 + (e_2-e_1)^2 + 2\,b(e_3, e_2-e_1) = 0 + (-1) + 2(1) = 1$

3) Poiché $F_1^2 > 0$, $F_2^2 < 0$, $F_3^2 > 0$, per il Teorema di Sylvester la segnatura di b è $(2,1)$.

4) La base (F_1, F_3, F_2) è una base di Sylvester. Infatti la matrice associata a b in questa base è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ che è la matrice di Sylvester di b.

5) Poiché la segnatura di b è $(2,1)$, la matrice A ha due autovalori positivi ed un autovalore negativo. Quindi $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \le \lambda_3$ e $\lambda_1\lambda_3 < 0$. Quindi non è vero che $\lambda_1\lambda_3 \ge 0$.