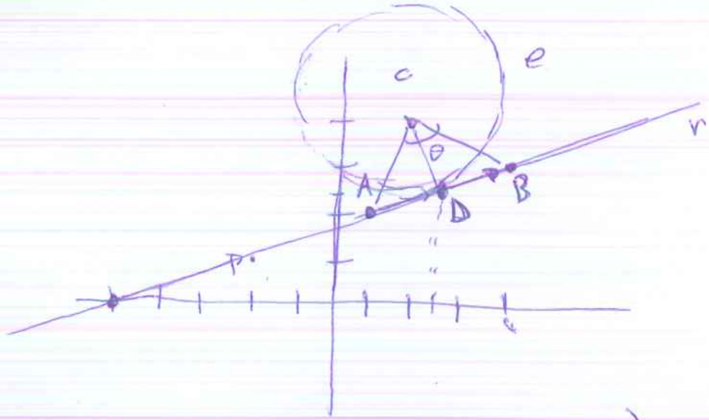
Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Denotiamo con r la retta passante per A ed avente pendenza $m = \frac{1}{3}$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane di r.*
2. *(2 punti) Calcolare la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r e denotarla D.*
3. *(1 punto) Calcolare il punto B ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto A attraverso la retta passante per C e D.*
4. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e tangente alla retta r.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del settore circolare del cerchio la cui circonferenza è $\mathcal{C}$ racchiuso nell'angolo convesso ACB.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*



$r: \; y = \frac{1}{3}x + c \qquad c = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$r: \; y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \qquad r: \; 3y = x + 5$

$r: \; x - 3y + 5 = 0$

$r = A + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $D = A + \frac{(C-A)\cdot v}{v \cdot v} v = A + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{10} v$

$= A + \frac{1}{2} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

3) $B - D = D - A \Rightarrow B = 2D - A = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) $\cancel{\ell} \; \|C - D\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\mathcal{C}: \; (x-2)^2 + (y-4)^2 = \frac{5}{2} \qquad \mathcal{C} = \left\{ C + \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$

5) $(A - C)\cdot(B - C) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$

Area $= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}\pi.$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard consideriamo i tre sottospazi affini:*

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-4 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \quad \pi : \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$$

1. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r_1 e r_2 senza cambiare la loro forma.*
2. *(2 punti) Dimostrare che r_1 e π si intersecano in un unico punto Q senza cambiare la loro forma.*
3. *(2 punti) Calcolare i due punti P_1 e P_2 tali che $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e $dist(P_1, P_2) = dist(r_1, r_2)$.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e Q.*

1) $$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = 4$$

$\Rightarrow$ r_1 e r_2 sono sghembe.

2) $$\begin{pmatrix}1+s+t\\2+s\\2t\end{pmatrix} \in r_1 \iff \begin{cases} (1+s+t)+(2+s)+2t=-2 \\ (1+\cancel{s}+t)-(2+\cancel{s})+2t=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s+3t=-5 \\ 3t=-1 \end{cases} \iff s=t=-1$$

$$Q = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

3) Il vettore direttore di r_2 è $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Fascio di piani per r_1 : $\alpha(x+y+z+2)+\beta(x-y+z+4)=0$

$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y+(\alpha+\beta)z=-2\alpha-4\beta$

Impongo che il vettore direttore sia v_2 = $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha=1-\beta\\ 1-2\beta=-1\end{array} \quad 2\beta=2 \quad \beta=1 \quad \alpha=0$

π_1 : $x-y+z=-4$

$P_1 = \pi_1 \cap r_2$ $\quad \begin{cases} x-y+z=-4 \\ x+y=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Vettore direttore di $r_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = v_1$

$\alpha(x+y-1)+\beta(x+2y+z-2)=0 \quad (\alpha+\beta)x+(\alpha+2\beta)y+\beta z = \alpha+2\beta$ $\quad \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=1\\ \alpha+2\beta=0\\ \beta=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=-1\end{array}$

π_2 : $x-z=0$ $\quad \pi_2 \cap r_1 = \begin{cases} x+y+z=-2 \\ y=1 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=1 \\ 2z=-3 \end{cases} \quad P_2 = \begin{pmatrix}-3/2\\1\\-3/2\end{pmatrix}$

4) Area $\widehat{P_1P_2Q} = \frac{1}{2}\|(P_1-Q)\wedge(P_2-Q)\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\|$

$= \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare una base del nucleo di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*
4. *(1 punto) Trovare una matrice diagonale D e due matrici invertibili B_1 e B_2 tali che $B_2^{-1}AB_1 = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{100} (suggerimento: usare Cayley-Hamilton).*

1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v} \right\}.$

2) $P_A(x) = x^2(x-4)$

3) $ma_A(0) = 2 \neq 1 = mg_A(0) \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

4) $\mathcal{B}_1 = \{ e_1, e_3, \overset{e_1 - e_2}{\overset{\shortparallel}{v}} \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ A^1, A^3, e_1 \}.$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_{B_1}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{B_2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_D"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d, "F_{B_1}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_e"] & {} \arrow[d, equal] & {} \arrow[d, "F_{B_2}"] \\ {} \arrow[r, "B_1"'] & {} \arrow[r, "A"'] & {} & {} \arrow[l, "B_2"] \end{tikzcd}$$

$B_1 = (e_1 | e_3 | v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = (A^1 | A^3 | e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5) $A^3 = 4A^2 \Rightarrow A^n = 4^{n-2} A^2 \Rightarrow A^{100} = 4^{98} A^2 \qquad A^2 = 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13 settembre 2022, **ambiente** Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ *data da*

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* F *è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare* $F(x^2 + x + 1)$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* V *associata ad* F *nelle basi standard* $(1, x, x^2)$ *e* (e_1, e_2, e_3).
4. *(1 punto) Dimostrare che* F *è un isomorfismo.*
5. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ *di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *tale che la matrice associata ad* F *nelle basi* $\mathcal{B}$ *e nella base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *sia l'identità.*
6. *(1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore* p *dei tre punti* $(-1, 1)$, $(0, 2)$ *e* $(1, 0)$, *ovvero l'unico polinomio tale che* $F(p) = (1, 2, 0)^t$.

1) $F(\alpha p+\beta q) = \begin{pmatrix} (\alpha p+\beta q)(-1) \\ (\alpha p+\beta q)(0) \\ (\alpha p+\beta q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p(-1)+\beta q(-1) \\ \alpha p(0)+\beta q(0) \\ \alpha p(1)+\beta q(1) \end{pmatrix} = \alpha F(p)+\beta F(q)$. $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\forall p,q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$\Rightarrow f$ è lineare

2) $F(x^2+x+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) ~~V=~~ $F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\det V =$ det di Vandermonde $= (0-(-1))(1-(-1))(1-0) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow F$ è un isom.

5) $p_1(x) = \frac{x(x-1)}{-2}$ $p_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$ $p_3(x) = \frac{(x+1)x}{2}$

6) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dove $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema $VX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcoliamolo con Cramer:

$a_0 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$a_1 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow p(x) = 2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e denotiamo b_A la corrispondente forma bilineare $b_A(X,Y) = X^tAY$ su $\mathbb{R}^3$.

1. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b_A)$.*
2. *(2 punti) Calcolare la segnatura di A.*
3. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester $\mathcal{S} = (E_1, E_2, E_3)$ per b_A.*
4. *(1 punto) Sia $v = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ scritto nella base $\mathcal{S}$. Trovare un'equazione nelle variabili x_1, x_2, x_3 che descrive la proprietà di v di essere isotropo.*
5. *(1 punto) Scegliere un qualunque vettore isotropo non-nullo v. Calcolare la dimensione di $\langle v\rangle^\perp$ e trovare una sua base.*

1) $e_1^2 = -3 < 0$. $\quad e_2 - \frac{e_2^t A e_1}{e_1^2} e_1 = e_2 + \frac{1}{3} e_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_2^2 = (1\ 3\ 0)\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 7\ -3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 21 > 0$

$e_3 - \frac{e_3^t A F_2}{F_2^2} F_2 - \frac{e_3 A e_1}{e_1^2} e_1 = e_3 - \frac{(0\ -1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad F_3^2 = (1\ 3\ 7)\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (0\ 0\ -10)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -70 < 0$

(F_1, F_2, F_3) è una base ortogonale.

2) $sg(A) = (1,2)$

3) $E_1 = \frac{F_2}{\sqrt{F_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{F_1}{e_1^2} = \frac{1}{\sqrt{|3|}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \frac{F_3}{\sqrt{|F_3^2|}} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

4) Sia $v = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$. v è isotropo $\iff x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

5) $v = E_1 + E_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché bA è non-degenere,

$\dim\langle v\rangle^\perp = 3 - \dim\langle v\rangle = 2$.

Un vettore non-nullo ortogonale a v ma diverso da v è ad esempio E_3.

$\langle v\rangle^\perp = \langle E_1 + E_2, E_3\rangle$.