

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria Civile
Appello di settembre 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

13 settembre 2022

Esercizio 1. In \mathbb{R}^2 dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Denotiamo con r la retta passante per A ed avente pendenza $m = \frac{1}{3}$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane di r .
2. (2 punti) Calcolare la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r e denotarla D .
3. (1 punto) Calcolare il punto B ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto A attraverso la retta passante per C e D .
4. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza \mathcal{C} di centro C e tangente alla retta r .
5. (1 punto) Calcolare l'area del settore circolare del cerchio la cui circonferenza è \mathcal{C} racchiuso nell'angolo convesso ACB .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare standard consideriamo i tre sottospazi affini:

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + z = -4 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. (2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r_1 e r_2 senza cambiare la loro forma.
2. (2 punti) Dimostrare che r_1 e π si intersecano in un unico punto Q senza cambiare la loro forma.
3. (2 punti) Calcolare i due punti P_1 e P_2 tali che $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e $\text{dist}(P_1, P_2) = \text{dist}(r_1, r_2)$.
4. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1 , P_2 e Q .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) *Calcolare una base del nucleo di A .*
2. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*
4. (1 punto) *Trovare una matrice diagonale D e due matrici invertibili B_1 e B_2 tali che $B_2^{-1}AB_1 = D$.*
5. (1 punto) *Calcolare A^{100} (suggerimento: usare Cayley-Hamilton).*

Esercizio 4. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che F è lineare.
2. (1 punto) Calcolare $F(x^2 + x + 1)$.
3. (2 punti) Scrivere la matrice V associata ad F nelle basi standard $(1, x, x^2)$ e (e_1, e_2, e_3) .
4. (1 punto) Dimostrare che F è un isomorfismo.
5. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che la matrice associata ad F nelle basi \mathcal{B} e nella base canonica di \mathbb{R}^3 sia l'identità.
6. (1 punto) Calcolare il polinomio interpolatore p dei tre punti $(-1, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, 0)$, ovvero l'unico polinomio tale che $F(p) = (1, 2, 0)^t$.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e denotiamo b_A la corrispondente forma bilineare $b_A(X, Y) = X^t A Y$ su \mathbb{R}^3 .

1. (2 punti) *Trovare una base ortogonale di (\mathbb{R}^3, b_A) .*
2. (2 punti) *Calcolare la segnatura di A .*
3. (1 punto) *Trovare una base di Sylvester $\mathcal{S} = (E_1, E_2, E_3)$ per b_A .*
4. (1 punto) *Sia $v = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$ un vettore di \mathbb{R}^3 scritto nella base \mathcal{S} . Trovare un'equazione nelle variabili x_1, x_2, x_3 che descrive la proprietà di v di essere isotropo.*
5. (1 punto) *Scegliere un qualunque vettore isotropo non-nullo v . Calcolare la dimensione di $\langle v \rangle^\perp$ e trovare una sua base.*