Prova scritta di Geometria 1
Appello straordinario riservato a fuori-corso, part-time, studenti con disabilità e DSA
Durata prova: 3 ore
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli e Marco Trevisiol

21 ottobre 2022

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti punti del piano reale:*

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. *Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta passante per B e C. Denominare tale retta r.*

2. *Calcolare la distanza tra A ed r.*

3. *Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro A e tale che la retta r sia ad essa tangente.*

4. *Trovare il punto D ottenuto ruotando C attorno a B di un angolo di 60 gradi in senso anti-orario.*

5. *Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} 4x - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *Trovare le equazioni parametriche di* r.

2. *Trovare le equazioni cartesiane di* s.

3. *Stabilire la posizione reciproca di* r *ed* s.

4. *Calcolare la distanza tra* r *ed* s.

5. *Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 \\ -12 & 14 & 12 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle quattro incognite reali* x_1, x_2, x_3, x_4*:*

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_3 &= -2 \end{cases}$$

Esercizio 5. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. *Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.