Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 7

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 16 Novembre 2021

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice reale:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che A è invertibile.*
2. *Scrivere A come prodotto di matrici elementari.*
3. *Calcolare il determinante di ognuna di tali matrici elementari e verificare che il loro prodotto è uguale al determinante di A.*

Esercizio 2. 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

2. *Si consideri la seguente matrice complessa:*

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}.$$

(a) *Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda colonna;*

(b) *Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda riga.*

Esercizio 3. *Per ogni* $n \geq 1$ *si consideri la matrice* $A(n)$ *di taglia* $n \times n$ *la cui componente* (i, j) *è definita dalla formula*

$$A(n)_i^j = \begin{cases} 1 & se\ i < j \\ 2 & se\ i = j \\ 3 & se\ i > j \end{cases}$$

Calcolare $det(A(2020))$.

Esercizio 4. *1. Dimostrare che il determinante della seguente matrice è zero, per qualunque valore dei parametri:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & h & i & \ell & m \\ n & o & p & q & r \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 13247 & 13347 \\ 28469 & 28569 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{pmatrix}.$$

3. Sapendo che 195*,* 247 *e* 403 *sono divisibili per* 13*, dimostrare che anche il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *è divisibile per* 13*:*

Esercizio 5. 1. *Sia* A *una matrice* $n \times n$ *e sia* $d = det(A)$. *Calcolare* $det(-A)$. *Per ogni scalare* λ, *calcolare* $det(\lambda A)$.

2. *Sia* A *una matrice anti-simmetrica* $n \times n$. *Dimostrare che* $det(A) = 0$ *se* n *è dispari e dimostrare che questa affermazione è falsa se* n *è pari.*

3. *Trovare tutti i valori di* $t \in \mathbb{R}$ *per i quali i tre vettori*

$$\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$.