

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 9
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 30 Novembre 2021

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti matrici A determinare equazioni cartesiane di $\text{Col}(A)$ utilizzando i due modi visti a lezione, ovvero riducendo a scala $(A|X)$ e trovando una base di $\text{ker}(A^t)$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

Esercizio 2. • *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di \mathbb{R}^2*

1. *la retta passante per il punto $P = (1, 1)^t$ e parallela alla retta di equazione $2x + 3y = 5$;*
 2. *i punti R della retta $2x - y = 4$ tali che il triangolo di vertici $P = (1, 1)^t$, $Q = (1, 0)^t$ ed R abbia area uguale a 2;*
 3. *la retta passante per i punti $P_1 = (2, -3)^t$ e $P_2 = (2, 5)^t$;*
 4. *la retta passante per i punti $P_1 = (2, 3)^t$ e $P_2 = (1, 4)^t$;*
 5. *il punto P_1 tale che il punto $B = (1, 2)^t$ sia il baricentro del triangolo di vertici P_1 , $P_2 = (1, 3)^t$ e $P_3 = (2, -1)^t$.*
- *Determinare la posizione reciproca delle seguenti rette di \mathbb{R}^2 :*
1. $r_1 : 2x + 3y = 1$ e $r_2 : 2x - 3y = 1$;
 2. $r_1 : x + y = 2$ e $r_2 = (-2, 2)^t + \langle (4, -1)^t \rangle$;
 3. $r_1 = (1, 2)^t + \langle (1, 2)^t \rangle$ e $r_2 = (1, -1)^t + \langle (2, -3)^t \rangle$.

Esercizio 3. Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ 3 punti non allineati tali che l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ sia 1.

1. Determinare la forma parametrica delle rette contenenti i lati del triangolo $P_1P_2P_3$.
2. Calcolare le coordinate dei punti Q_1 sul lato P_2P_3 in modo che il vettore $P_2 - Q_1$ sia il doppio del vettore $Q_1 - P_3$, Q_2 sul lato P_3P_1 in modo che $P_3 - Q_2$ sia il doppio del vettore $Q_2 - P_1$ e Q_3 definito similmente.
3. Calcolare l'area del triangolo $Q_1Q_2Q_3$.
4. Determinare la forma parametrica delle rette r_1 per P_1 e Q_1 , r_2 per P_2 e Q_2 e r_3 per P_3 e Q_3 .
5. Calcolare le coordinate dei punti $X_1 = r_2 \cap r_3$, $X_2 = r_3 \cap r_1$, $X_3 = r_1 \cap r_2$.
6. Calcolare l'area del triangolo $X_1X_2X_3$.

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti 8 punti di \mathbb{R}^2 :*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$P_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- 1. Fare un disegno che rappresenti il loro involucro convesso e calcolarne l'area.*
- 2. Calcolare il baricentro degli otto punti P_1, \dots, P_8 ed il baricentro del loro involucro convesso. Coincidono?*

Esercizio 5. Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di sottospazi affini di \mathbb{R}^3 (senza cambiare la loro forma):

- 1. $\pi_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) \right\rangle, \pi_2 : 2x + 3y + z = 1;$
- 2. $r = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle, \pi_2 : 2x + 3y - z = -1;$
- 3. $r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}; r_2 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle.$
- Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di \mathbb{R}^3
 1. il piano passante per i tre punti $P_1 = (1, 1, 1)^t$, $P_2 = (-2, 3, 4)^t$ e $P_3 = (2, 2, 3)^t$;
 2. il piano passante per il punto $P = (1, 1, 1)^t$ e parallelo al piano di equazione $x + y + z = 1$;
 3. la retta che giace sia nel piano $x + y + z = 2$ che nel piano $x + 2y + 3z = 2$.
 4. il piano che contiene la retta $\begin{cases} x + 2y - 1z = 2 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$ ed il punto $Q = (1, 2, 3)^t$.
- Dimostrare che le due rette

$$r_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle; \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe e trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 e parallelo ad r_1 .

Esercizio 6. Siano r e π una retta ed un piano di \mathbb{R}^3 , rispettivamente.

1. Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi : ax + by + cz = d$. Sia $A_\pi = (a, b, c)$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:

Posizione reciproca	$A_\pi v$	$rg(A_\pi v d - A_\pi X_0)$
$r \subset \pi$		
$r \parallel \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

2. Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:

Posizione reciproca	$det(v w_1 w_2)$	$rg(v w_1 w_2 X_0 - Y_0)$
$r \subset \pi$		
$r \parallel \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

3. Supponiamo che $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ e $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. Poniamo $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:

Posizione reciproca	$\det(A_r(w_1 w_2))$	$\text{rg}(A_r(w_1 w_2) \mathbf{b} - A_r Y_0)$
$r \subset \pi$		
$r \parallel \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

4. Supponiamo che $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ e $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = d$. Siano $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ e $A_\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:

<i>Posizione reciproca</i>	$\det \left(\begin{array}{c} A_r \\ A_\pi \end{array} \right)$	$rg \left(\begin{array}{c c} A_r & \mathbf{b} \\ \hline A_\pi & d \end{array} \right)$
$r \subset \pi$		
$r \parallel \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		