Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 11

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 14 Dicembre 2021

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le seguenti matrici simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quali tra queste matrici è definita positiva (dimostrandolo se lo è ed esibendo un controesempio se non lo è), e per ogni tale matrice calcolare le seguenti quantità rispetto al prodotto scalare definito da tale matrice:

1. $||v||$, $||w||$;
2. $\cos(\widehat{vw})$;
3. *la proiezione ortogonale di* v *su* w;
4. $dist(v, w)$;
5. $dist(P, \langle v, w \rangle)$;
6. *le equazioni parametriche e cartesiane di* $\langle v, w \rangle^\perp$.

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale* $V = Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *delle matrici* 3×3 *si consideri la forma traccia* $g(A, B) = tr(A^t B)$.

1. *Il sottospazio vettoriale* $S = \langle \mathbf{1}_3 \rangle$ *generato dall'identità si chiama il sottospazio delle matrici* sferiche *ed il suo ortogonale* $S^\perp$ *si chiama il sottospazio delle matrici* deviatoriche. *Quindi ogni matrice* $A \in V$ *si scrive in maniera unica come* $A = sph(A) + dev(A)$ *dove* $sph(A) \in S$ *e* $dev(A) \in S^\perp$. *Calcolare la parte sferica* $sph(A)$ *e la parte deviatorica* $dev(A)$ *della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 9 & 11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Dimostrare che l'ortogonale del sottospazio delle matrici simmetriche di* V *è lo spazio delle matrici anti-simmetriche di* V.

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane*

$$U : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. *Determinare una base e la dimensione di U.*
2. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su U.*
3. *Calcolare la proiezione ortogonale su U di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$.*
4. *Calcolare la distanza di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$ da U.*

Esercizio 4.

1. *Calcolare il perimetro e il coseno degli angoli interni del triangolo di vertici* $A = (1, 1)$*,* $B = (2, 3)$ *e* $C = (3, 0)$*.*
2. *Calcolare la proiezione ortogonale di* $P_0 = (2, 0)$ *sulla retta* $r : 2x - y + 2 = 0$ *e poi calcolare la distanza di* P_0 *da* r*.*
3. *Trovare tutti i punti* P *della retta* $r : 2x - y + 2 = 0$ *tali che il triangolo di vertici* $A = (-1, 0)$*,* $B = (1, 1)$ *e* P *abbia area uguale ad 1.*
4. *Trovare tutti i punti* Q *della retta* $r : 2x - y + 2 = 0$ *tali che il triangolo di vertici* $A = (-1, 0)$*,* $B = (1, 1)$ *e* Q *sia isoscele sulla base* AQ*.*
5. *Trovare le equazioni parametriche e cartesiane delle due rette* r_1 *ed* r_2 *passanti per* $P = (-2, 2)$ *e che formano un angolo di* $\pi/4$ *con la retta* $r : 2x - y = -2$*.*

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale sull'immagine di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b sull'immagine di A.*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da $Im(A)$.*