

Nome, Cognome e Matricola

---

Esercizi Settimanali di Geometria 1  
Settimana 12  
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,  
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 21 Dicembre 2021

**Esercizio 1.** 1. Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli

$$v_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, v_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, v_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Stabilire se la base  $(v_1, v_2, v_3)$  ha la stessa orientazione di  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

2. Dimostrare che le due rette

$$r_1 = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right) + \left\langle \left( \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle, \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per  $r_2$  e parallelo ad  $r_1$ . Calcolare la distanza tra  $r_1$  ed  $r_2$ .



**Esercizio 2.** Si considerino le rette affini di  $\mathbb{R}^3$   $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$  e  $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$  dove

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calcolare il prodotto vettoriale  $n = v_1 \wedge v_2$  e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di  $n$  rispetto a  $v_1$  e  $v_2$ .
2. Calcolare l'area del triangolo di vertici  $0, v_1, v_2$ .
3. Stabilire la posizione reciproca di  $r_1$  ed  $r_2$ .
4. Calcolare la distanza tra  $r_1$  ed  $r_2$ .
5. Calcolare la matrice di proiezione ortogonale sul piano  $\langle v_1, v_2 \rangle$ .
6. Trovare una matrice  $A$  con le seguenti proprietà:  $AX = -3X$  per ogni  $X \in \langle v_1, v_2 \rangle$  e  $AY = 5Y$  per ogni  $Y \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ .



**Esercizio 3.** Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con *MATLAB* (il comando `charpoly` restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico).



**Esercizio 4.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .*
2. *Calcolare  $A^{10}$ .*





**Esercizio 5.** *Al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$  si consideri la matrice  $3 \times 3$*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare tutti i valori di  $k$  per i quali  $A_k$  è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *Trovare tutti i valori di  $k$  per i quali  $A_k$  è diagonalizzabile.*
3. *Per i valori di  $k$  per i quali  $A_k$  è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante  $\mathcal{B}$ , una matrice  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}A_k B = D$ .*
4. *Per i valori di  $k$  per i quali  $A_k$  è diagonalizzabile, calcolare  $A^{2n}$  per ogni  $n \geq 1$ .*

