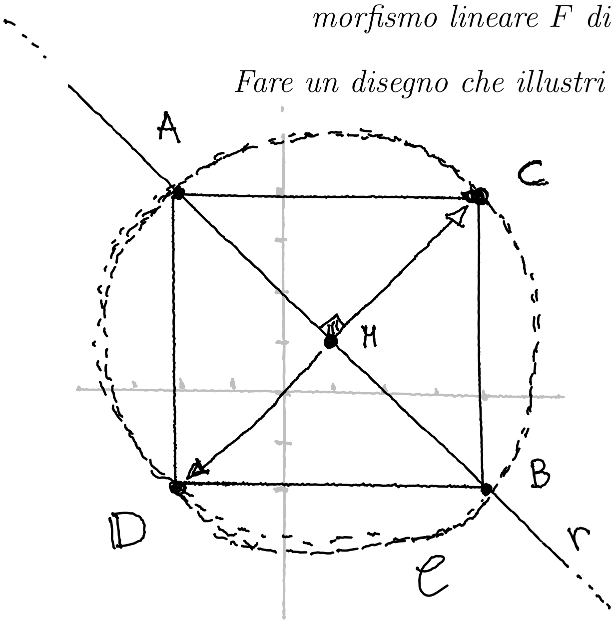
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
3. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta* r.
4. *(1 punto) Trovare un punto* C *avente coordinate positive e tale che il triangolo di vertici* A, B *e* C *sia rettangolo in* C e isoscele.
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* C *attraverso la retta* r.
6. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *avente il segmento* $\overline{P_1P_2}$ *come diametro.*
7. *(1 punto) Sia* $\mathcal{Q}$ *il quadrato di vertici* A, B, C *e* D. *Trovare un endomorfismo lineare* F *di* $\mathbb{R}^2$ *tale che* $F(\mathcal{Q})$ *abbia area uguale a* 1.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $M = \frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $r = A + \langle B - A \rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : x + y = 2$

3) $m = -1$

4) $\vec{MC} = Q_{-\frac{\pi}{2}}(\vec{MA}) \Rightarrow C = M + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(A-M) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

5) $\vec{MD} = -\vec{MC} \Rightarrow D = 2M - C = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) Centro $= M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, raggio $= r = \frac{1}{2}\|B-A\| = 3\sqrt{2}$

$\mathcal{C} = \left\{ M + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\} : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$

7) $Q = \mathcal{P}(\vec{DB}, \vec{DA})$, $F(Q) = \mathcal{P}(F(\vec{DB}), F(\vec{DA}))$.

Area $F(Q) = |\det(F(\vec{DB}), F(\vec{DA}))| = |\det F|\,|\det(\vec{DB}, \vec{DA})| =$

$= |\det F|$ Area $Q = |\det F|\, 36$. Quindi cerchiamo

F tale che $\det F = \pm\frac{1}{36}$. Ad esempio: $F(e_1) = \frac{1}{6}e_1$, $F(e_2) = \frac{1}{6}e_2$.

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 7 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane per il piano contenente r_1 e passante per il punto $P_2 = (-4, -7, 4)^t$.*
3. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche di r_1.*
4. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche del piano contenente r_2 e parallelo a r_1.*
5. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di r_2.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
7. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta di minima distanza tra r_1 ed r_2 ovvero la retta r_3 tale che $r_3 \perp r_i$ e $r_3 \cap r_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$.*

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) $A v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1$ e r_2 non sono parallele. $b - AP_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\Rightarrow r_1$ e r_2 sono sghembe.

2) Fascio di piani per r_1: $\alpha(x-y+z-7)+\beta(3x-y-z-3)=0$.
Passaggio per P_2: $\beta = 0$. Il piano cercato è $x-y+z=7$.

3) $\mathrm{rref}(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Il piano è $P_2 + \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

5) $\mathrm{Ker}\, v_2^t = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow r_2 : \begin{cases} -x + y = -3 \\ x + z = 0 \end{cases}$

6) $\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \dfrac{|(P_1 - P_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$. $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$

7) $r_3 = P_3 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle$. Per trovare P_3: $(v_1 | v_2 | v_1 \wedge v_2) X = P_1 - P_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Scegliamo
$P_3 = P_2 + 2v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$. $r_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$: $\begin{cases} x - 3z = -24 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 & 6 \\ -9 & 11 & -9 & 6 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1,1,0,0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
6. *(1 punto) Calcolare la quarta colonna di A^{-1} utilizzando Cramer.*
7. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A^{-1}.*

1) $\mathrm{Tr}A = -7+11-1-1 = 2$. 2) $\det A = 4$.

3) $Av = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v$. 4) $p_A(x) = (x+1)^2(x-2)^2$.

5) $Sp(A) = \{-1, 2\}$. $V_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(-\mathbb{1}_4 + A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V_2(A) = \mathrm{Ker}(2\mathbb{1}_4 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. $mg_A(-1) = ma_A(-1) = 2$,

$mg_A(2) = ma_A(2) = 2$. $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) $(A^{-1})^4 = A^{-1}e_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$: $x_1 = \dfrac{\det(e_4|A^2|A^3|A^4)}{\det A} = 3$, $x_2 = \dfrac{\det(A^1|e_4|A^3|A^4)}{\det A} = 3$,

$x_3 = \dfrac{\det(A^1|A^2|e_4|A^4)}{\det A} = 0$, $x_4 = \dfrac{\det(A^1|A^2|A^3|e_4)}{\det A} = -1$. $A^{-1}e_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7) $Sp(A^{-1}) = \{-1, \frac{1}{2}\}$. Infatti, $Av = \lambda v \Leftrightarrow A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *la base standard di* V*. Sia* $T : V \to V$ *l'applicazione lineare*

$$T(p(x)) = p(x+1) - xp'(x).$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2)$.

1. *(1 punto) Calcolare* $T(2x^2 - x + 1)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
3. *(1 punto) Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *(sia in partenza che in arrivo)*
7. *(1 punto) Sia* $U = \{p \in V | p(0) = 0\}$*. Esso è un sottospazio vettoriale. Calcolare la dimensione di* $Im(T) + U$.

1) $T(2x^2-x+1) = 2+4x-2x^2$

2) $F_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right)$. $B = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. $\det B = -2 \neq 0 \Rightarrow F_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ è una base di $\mathbb{R}^3 \overset{F_{\mathcal{C}} \text{ iso}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}$ è una base di V.

3) $T(1) = 1$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 1+2x-x^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

4) $\mathrm{Ker}\, A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \langle 1-x \rangle$.

5) $\mathrm{Im} S_A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \langle 1, 1+2x-x^2 \rangle$

6)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$C = B^{-1}AB$. $(B|AB) \rightsquigarrow (\mathbb{1}|C)$

$C = \begin{pmatrix}1&0&7/2\\1&0&1/2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

7) $U = \langle x, x^2 \rangle$. $U \cap \mathrm{Im}\, T = \langle 2x - x^2 \rangle$. Per la formula di Grassmann $\dim U + \mathrm{Im}\, T = \dim U + \dim \mathrm{Im}\, T - \dim U \cap \mathrm{Im}\, T = 3$.

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

ed il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Trovare una base di* U.
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per* $U^\perp$.
3. *(1 punto) Trovare una base ortonormale di* U
4. *(1 punto) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale* P_U *su* U.
5. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *su* U.
6. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* P *da* U.
7. *(1 punto) Trovare una matrice* A *tale che* $Au = 3u$ *per ogni* $u \in U$ *e* $Av = -3v$ *per ogni* $v \in U^\perp$ *e stabilire se* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*

1) $U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $U^\perp : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$

3) $E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4) $B = (E_1 | E_2)$. $P_U = B B^t = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 0 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & -1/3 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$.

5) $pr_U(P) = P_U P = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6) $dist(P, U) = \| P - pr_U P \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+36+1+9} = \sqrt{55}$

7) $\mathbb{1}_4 = P_U + P_{U^\perp} \Rightarrow P_{U^\perp} = \mathbb{1}_4 - P_U$.

$A = 3P_U - 3P_{U^\perp} = 6P_U - 3\mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^t$. È ortogonalmente diagonalizzabile per il Teorema spettrale.