Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Primo appello 2022
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

9 gennaio 2023

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
3. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta* r.
4. *(1 punto) Trovare un punto* C *avente coordinate positive e tale che il triangolo di vertici* A, B *e* C *sia rettangolo in* C *e isoscele.*
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* C *attraverso la retta* r.
6. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diametro.*
7. *(1 punto) Sia* $\mathcal{Q}$ *il quadrato di vertici* A, B, C *e* D. *Trovare un endomorfismo lineare* F *di* $\mathbb{R}^2$ *tale che* $F(\mathcal{Q})$ *abbia area uguale a* 1.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 7 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane per il piano contenente* r_1 *e passante per il punto* $P_2 = (-4, -7, 4)^t$*.*
3. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche di* r_1*.*
4. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche del piano contenente* r_2 *e parallelo a* r_1*.*
5. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di* r_2*.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
7. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta di minima distanza tra* r_1 *ed* r_2 *ovvero la retta* r_3 *tale che* $r_3 \perp r_i$ *e* $r_3 \cap r_i \neq \emptyset$ *per* $i = 1, 2$*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 & 6 \\ -9 & 11 & -9 & 6 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0, 0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
6. *(1 punto) Calcolare la quarta colonna di A^{-1} utilizzando Cramer.*
7. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A^{-1}.*

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *la base standard di* V*. Sia* $T : V \to V$ *l'applicazione lineare*

$$T(p(x)) = p(x+1) - xp'(x).$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = (1+x, 1-x, 1+x+x^2)$.

1. *(1 punto) Calcolare* $T(2x^2 - x + 1)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
3. *(1 punto) Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *(sia in partenza che in arrivo)*
7. *(1 punto) Sia* $U = \{p \in V | p(0) = 0\}$*. Esso è un sottospazio vettoriale. Calcolare la dimensione di* $Im(T) + U$.

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

ed il punto $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Trovare una base di* U.
2. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per* $U^\perp$.
3. *(1 punto) Trovare una base ortonormale di* U
4. *(1 punto) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale* P_U *su* U.
5. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *su* U.
6. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* P *da* U.
7. *(1 punto) Trovare una matrice* A *tale che* $Au = 3u$ *per ogni* $u \in U$ *e* $Av = -3v$ *per ogni* $v \in U^\perp$ *e stabilire se* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*