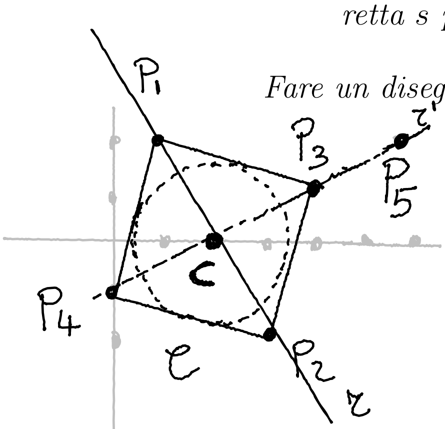
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *siano* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2.
2. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_3 *attraverso la retta* r.
3. *(1 punto) Trovare il punto* P_5 *ottenuto ruotando il punto* P_2 *attorno al punto* P_1 *in senso anti-orario di un angolo di* $\pi/3$.
4. *(1 punto) Dimostrare che* P_5 *appartiene alla retta passante per* P_3 *e* P_4.
5. *(1 punto) Dimostrare che il poligono* $\mathcal{Q}$ *di vertici* P_1, P_2, P_3 *e* P_4 *è un quadrato.*
6. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel poligono* $\mathcal{Q}$.
7. *(1 punto) Le due rette* $r_1 : (2-2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 1$ *e* $r_2 : \sqrt{3}x - 2y = -2$ *sono incidenti in un punto* P. *Trovare un'equazione cartesiana della retta* s *passante per i punti* P *e* P_5 *senza calcolare* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \rangle : 2x+y=4.$

2) $P_4 = P_1 + Q_{-2}(\overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\-4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

3) $P_5 = P_1 + R_{\pi/3}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

4) r' = retta per P_3 e P_4 : $x-2y=2$. $(2+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}=2 \Rightarrow P_5 \in r'$

5) $\overrightarrow{P_4P_2} + \overrightarrow{P_4P_1} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{P_4P_3} \Rightarrow Q$ è un parallelogramma.
$\|\overrightarrow{P_4P_2}\| = \|\overrightarrow{P_4P_1}\| = \sqrt{10} \Rightarrow Q$ è un rombo (ha i lati uguali).
$\overrightarrow{P_4P_2} \cdot \overrightarrow{P_4P_1} = 0 \Rightarrow Q$ è un quadrato (ha gli angoli uguali a $\frac{\pi}{2}$).

6) centro $C = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, raggio $= \frac{\|\overrightarrow{P_1P_3}\|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. $\mathcal{C} : (x-2)^2 + y^2 = \frac{5}{2}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{10}}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi] \right\}$

7) Fascio di rette per r_1 e r_2 : $\alpha\left((2-2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y - 2\right) + \beta(\sqrt{3}x - 2y + 2) = 0$.
Passaggio per P_5 : $-7\alpha + 8\beta = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (8, 7)$.
La retta cercata è $s : (16-9\sqrt{3})x + (8\sqrt{3}-14)y = 2$.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *siano*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se i punti* P_1, P_2 *e* Q *sono allineati.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r *passante per i punti* P_1 *e* P_2.
3. *(1 punto) Usare il fascio di piani per* r *per trovare equazioni cartesiane del piano* π *passante per i punti* P_1, P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Calcolare* $n = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$.
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
6. *(2 punti) Calcolare la distanza tra le rette* $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow P_1, P_2, Q$ sono allineati.

2) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} x + z = 3 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$

3) fascio di piani per r: $\pi_{(\alpha,\beta)} : \alpha(x+z-3) + \beta(y-2z+3) = 0$
passaggio per $P_3 \Rightarrow -\alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \pi = \pi_{(4,1)} : 4x + y + 2z = 9$

4) $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Notiamo che $\pi : n \cdot X = n \cdot P_3$

5) Area $(T) = \frac{1}{2} \|n\| = \frac{\sqrt{21}}{2}$

6) $\text{dist}(X_1 + \langle v_1 \rangle, X_2 + \langle v_2 \rangle) = \text{dist}(X_1 - X_2, \langle v_1, v_2 \rangle)$. $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow$ le rette non sono parallele $\Rightarrow$
$\Rightarrow \text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|(X_1 - X_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A.*
2. *(2 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. *(1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
5. *(1 punto) Trovare uno scalare non-nullo λ tale che la matrice $\lambda(A-\mathbf{1}_4)$ sia un proiettore.*

1) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = (x+1)^2(x-1)^2$. $Sp(A) = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

2) $V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_{V_1(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$V_{-1}(A) = \operatorname{Ker}(-\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_{V_{-1}(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

3) $ma_A(1) = mg_A(1) = 2 = ma_A(-1) = mg_A(-1)$. A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

4) $B^{-1}AB = D \Rightarrow A = BDB^{-1} \Rightarrow A^n = BD^nB^{-1}$. $D^n = \begin{cases} \mathbb{1}_4 & \text{se } n \text{ è pari}, \\ D & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$

$\Rightarrow A^n = \begin{cases} \mathbb{1}_4 & \text{se } n \text{ è pari}, \\ A & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$

5) Una matrice quadrata C è un proiettore (su $\operatorname{Col} C$ lungo $\operatorname{Ker} C$) se e solo se $C^2 = C$.

$(\lambda(A-\mathbb{1}_4))^2 = \lambda^2(A-\mathbb{1}_4)^2 = \lambda^2(A^2 - 2A + \mathbb{1}_4) = \lambda^2(2\mathbb{1}_4 - 2A) = -2\lambda(\lambda(A-\mathbb{1}_4))$

$-2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$. Per cui $\lambda = -\frac{1}{2}$ è lo scalare richiesto.

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W : \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per U.*
2. *(1 punto) Trovare una base $\{w_1\}$ di W.*
3. *(1 punto) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.*
4. *(1 punto) Calcolare la matrice C associata a pr_U^W (ovvero la proiezione su U lungo W) nella base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1)$.*
5. *(2 punti) Calcolare la matrice A associata a pr_U^W nella base canonica.*
6. *(1 punto) Trovare $u \in U$ e $w \in W$ tali che $u + w = 2e_1 - e_2 + e_3$.*

1) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 2 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2+x_1 \\ 0 & 0 & x_3-x_2+x_1 \end{array}\right) \Rightarrow U : x_1 - x_2 + x_3 = 0.$

2) $w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) w_1 non è soluzione di $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Quindi $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Per la formula di Grassmann, $\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$.

4) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"'] & = & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "pr_U^W"] \arrow[d, "F_\mathcal{B}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_\mathcal{B}"] & = & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \arrow[ll, "B"] \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[rr, "B"'] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$A = BCB^{-1}$ dove $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo B^{-1} con Cramer: $\det B = -1$.

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6) $u = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - u = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base di $V_1(A)$ (=autospazio di autovalore 1).*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale di $V_1(A)$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(2 punti) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^tAB = D$.*

1) $A = A^t \xRightarrow{\text{Teorema spettrale reale}}$ A è ortogonalmente diagonalizzabile.

2) $Av = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \langle v \rangle$, quindi v non è un autovettore per A.

3) $V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}(1\ 1\ {-1}\ {-1}) \Rightarrow \mathcal{B}_{V_1(A)} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4) $F_1 = v_1$. $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base ortogonale è (F_1, F_2, F_3).

5) Poiché A è ort. diag. e $\dim V_1(A) = 3$, $V_1(A)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è l'unico altro autospazio. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = \{1, -3\}$.

6) $B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & -1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$.