

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Secondo appello a.a. 2022/23

30 gennaio 2023

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) siano $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2 .
2. (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_3 attraverso la retta r .
3. (1 punto) Trovare il punto P_5 ottenuto ruotando il punto P_2 attorno al punto P_1 in senso anti-orario di un angolo di $\pi/3$.
4. (1 punto) Dimostrare che P_5 appartiene alla retta passante per P_3 e P_4 .
5. (1 punto) Dimostrare che il poligono \mathcal{Q} di vertici P_1, P_2, P_3 e P_4 è un quadrato.
6. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza \mathcal{C} inscritta nel poligono \mathcal{Q} .
7. (1 punto) Le due rette $r_1 : (2 - 2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 1$ e $r_2 : \sqrt{3}x - 2y = -2$ sono incidenti in un punto P . Trovare un'equazione cartesiana della retta s passante per i punti P e P_5 senza calcolare P .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) siano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Stabilire se i punti P_1 , P_2 e Q sono allineati.
2. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_1 e P_2 .
3. (1 punto) Usare il fascio di piani per r per trovare equazioni cartesiane del piano π passante per i punti P_1 , P_2 e P_3 .
4. (1 punto) Calcolare $n = \vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}$.
5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
6. (2 punti) Calcolare la distanza tra le rette $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$ dove

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A .*
2. (2 punti) *Calcolare una base di ogni autospazio di A .*
3. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. (1 punto) *Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
5. (1 punto) *Trovare uno scalare non-nullo λ tale che la matrice $\lambda(A - \mathbf{1}_4)$ sia un proiettore.*

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 :

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W : \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

1. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane per U .
2. (1 punto) Trovare una base $\{w_1\}$ di W .
3. (1 punto) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
4. (1 punto) Calcolare la matrice C associata a pr_U^W (ovvero la proiezione su U lungo W) nella base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1)$.
5. (2 punti) Calcolare la matrice A associata a pr_U^W nella base canonica.
6. (1 punto) Trovare $u \in U$ e $w \in W$ tali che $u + w = 2e_1 - e_2 + e_3$.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. (1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A .
3. (1 punto) Calcolare una base di $V_1(A)$ (=autospazio di autovalore 1).
4. (1 punto) Trovare una base ortogonale di $V_1(A)$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.
5. (2 punti) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.
6. (1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.

